

Funktionentheorie 2

Vorlesung von Prof. Dr. N. P. Skoruppa
im Sommersemester 2003
Universität Siegen

In L^AT_EX 2_ε gesetzt von Lars Fischer.

Vorwort

Im Sommersemester 2003 las ich an der Universität Siegen die Funktionentheorie II. Für diese klassische Vorlesung stehen mittlerweile Lehrbücher und Lehrinhalte aus einem Zeitraum von mehr als 100 Jahren zur Verfügung, und so besteht die Leistung des Dozenten ganz wesentlich darin, eine für eine einsemestrige Vorlesung geeignete Auswahl zu treffen. Der Schwerpunkt der vorliegenden Vorlesung sind die elliptischen Funktionen und die Modulformen. Es wird dabei immer wieder der Begriff des Divisors als Mittler zwischen lokalen und globalen Eigenschaften meromorpher Funktionen in den Vordergrund gestellt, und es werden so oft als möglich eine weitergehende Algebraisierung der Theorie und der Begriff der Riemanschen Fläche als nächste Stufe zum Verständnis angedeutet.

Dieses schöne Skript hat Herr Lars Fischer selbständig und lediglich anhand seiner eigenen Notizen zur Vorlesung *ausgearbeitet*. Es wurde von meiner Seite nichts geändert oder hinzugefügt. Daher ist der Untertitel „In L^AT_EXgesetzt von Lars Fischer“ übertrieben bescheiden. Allerdings wäre auch schon allein die technische Ausführung in L^AT_EX und mit all den hilfreichen Abbildungen eines lobenden Hinweises wert.

Ich möchte Herrn Fischer an dieser Stelle nochmals ganz ausdrücklich für seine Arbeit danken. Mein Dank geht auch an die anderen Hörer meiner Vorlesung: für die Korrekturhinweise zum Skript, die sie Herrn Fischer zukommen liessen, und für die konzentrierte, arbeitsintensive und zugleich menschlich nette Atmosphäre während der Vorlesungen.

Siegen, im September 2003

Nils-Peter Skoruppa

Inhaltsverzeichnis

1 Weierstraßscher Produktsatz	1
1.1 Vorbemerkungen zu Reihen holomorpher Funktionen	1
1.2 Ganze Funktionen sind durch ihre Nullstellen bestimmt	2
1.3 Ganze Funktionen ohne Nullstellen	5
1.4 Wiederholung Analysis I: Unendliche Produkte	5
1.5 Unendliche Produkte holomorpher Funktionen	8
1.6 Beweis des Weierstraßschen Produktsatzes	9
1.7 Beispiele zu dem Weierstraßschen Produktsatz	11
1.7.1 Produktdarstellung des Sinus	11
1.7.2 Die Weierstraßsche σ -Funktion	11
1.7.3 Die Γ -Funktion	15
2 Die Γ-FunktionDie Gamma Funktion	17
3 Die Riemannschen Flächen $\overline{\mathbb{C}}$, \mathbb{C} und \mathfrak{h}	23
3.1 $\overline{\mathbb{C}}$ als Riemannsche Fläche	23
3.2 Meromorphe Funktionen auf $\overline{\mathbb{C}}$	25
3.3 Automorphismen der komplexen Ebene	27
3.4 Die Automorphismen von $\overline{\mathbb{C}}$	29
3.5 Die Automorphismen von \mathfrak{h}	32
3.6 Ergänzungen	34
4 Der Satz von Mittag-Leffler	37
4.1 Die M-L-Teilbruchzerlegung für rationale Funktionen	37
4.2 Die M-L-Teilbruchzerlegung für meromorphe Funktionen	37
4.3 Beispiele zum Satz von Mittag Leffler	38
4.3.1 Der Cotangens	38
4.3.2 Die Weierstraßsche \wp -Funktion	39
5 Elliptische Funktionen	41
5.1 Divisoren auf \mathbb{C}/Γ	41
5.2 Drei der vier Liouilleschen Sätze	42
5.3 Thetafunktionen	44
5.4 Bestimmung der Hauptdivisoren	48
5.5 Die algebraische Struktur von $\text{Ell}(\Gamma)$	51

Inhaltsverzeichnis

5.6	\mathbb{C}/Γ als algebraische Struktur	53
5.6.1	Projektive Räume	53
5.7	\mathbb{C}/Γ als Riemannsche Fläche	60
5.8	Variation der Gitters	62
6	Modulformen	71
6.1	Die Modulgruppe und die obere Halbebene	71
6.2	Modulformen	73
6.3	Die Valenzformel	76
6.4	Der Ring der Modulformen	79
6.5	Ergänzungen	84
6.6	Der Körper der Modulfunktionen	85
6.7	Thetareihen	88
	Symbolverzeichnis	93
	Index	95

1 Weierstraßscher Produktsatz

1.1 Vorbemerkungen zu Reihen holomorpher Funktionen

Seien die (f_n) eine Folge von Funktionen die in der Menge $K \subseteq \mathbb{C}$ definiert sind.

Definition 1.1 Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ heißt **gleichmäßig konvergent auf K** , falls gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall m \geq n_0 \forall z \in K : \left| \sum_{j=n}^m f_j(z) \right| < \epsilon$$

Bemerkung:

- Ist $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ gleichmäßig konvergent auf K , dann konvergiert die Reihe $\sum f_n$ gegen eine Grenzfunktion f , d.h. $\forall z \in K$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ konvergent und $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$.
- Die gleichmäßige Konvergenz ist gleichbedeutend mit: es gibt ein f auf K mit

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 \forall z \in K : \left| f(z) - \sum_{k=1}^n f_k(z) \right| < \epsilon$$

- Gleichmäßige Konvergenz auf kompakten Teilmengen eines Gebietes $G \subseteq \mathbb{C}$ bezeichnet man als **kompakt gleichmäßige Konvergenz in G**

Satz 1.1 Sei $G \in \mathbb{C}$ ein Gebiet (**d.h. $G \subseteq \mathbb{C}$ ist offen**), die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiere gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von G gegen eine Grenzfunktion f . Dann gilt

1. Sind alle $f_n (n \geq 1)$ stetig, so ist auch f stetig
2. Sind alle $f_n (n \geq 1)$ stetig und ist γ ein stückweise diffbarer Weg in G , dann gilt
$$\int_{\gamma} f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma} f_n$$
3. Sind alle f_n holomorph in G , so ist auch f holomorph
4. Sind alle f_n holomorph, so konvergiert $\forall p \geq 0$ die Reihe $\sum f_n^{(p)}$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von G gegen $f^{(p)}$

1 Weierstraßscher Produktsatz

Beweis: (1.) und (2.) wie in Analysis

zu (3.): Nach dem Satz von Morera ist zu zeigen: $\int_{\gamma} f = 0$ für alle geschlossenen stückweise stetigen Wege γ in G : Aber die f_n sind holomorph, daher ist $\int_{\gamma} f_n = 0$, mit (2.) gilt dann $\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} \sum f_n \stackrel{(2.)}{=} \sum \int_{\gamma} f_n$.

zu (4.): Sei $z_0 \in G$, sei γ sei Kreis in G um z_0 . Dann gilt (Cauchy Formel):

$$\begin{aligned} f^{(p)}(z_0) &= \frac{p!}{2\pi i} \int \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{p+1}} d\zeta = \frac{p!}{2\pi i} \int \frac{\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{p+1}} d\zeta \\ &\stackrel{(2.)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{p!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{p+1}} d\zeta}_{\text{Cauchy: } f_n^{(p)}(z_0)} \end{aligned}$$

Zum Nachweis der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen von G genügt es, diese auf abgeschlossenen Kreisscheiben $K \subseteq G$ nachzuweisen (jede kompakte Teilmenge lässt sich durch Kreisscheiben überdecken): Zu K wähle γ als Kreisbogen mit Mittelpunkt $z \in K$ und Radius R , der außerhalb von K aber innerhalb G verläuft und der Abstand zwischen K und γ sei $\rho > 0$. Dann gilt $\left| \sum_{k=n}^m f_k^{(p)}(z) \right| = \left| \sum_{k=n}^m \frac{p!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_k(\zeta)}{(\zeta - z)^{p+1}} d\zeta \right| \leq \frac{p!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{|\sum_{k=n}^m f_k(\zeta)|}{|\zeta - z|^{p+1}} |d\zeta| < \frac{p!}{2\pi i} \frac{\epsilon}{\rho^{p+1}} \underbrace{\int_{\gamma} |d\zeta|}_{=2\pi R}$ ■

Bemerkung: Gibt es zu jeder kompakten Teilmenge $K \subseteq G$ eine Folge γ_n mit $\gamma_n > 0$, sodass gilt: $|f_n(z)| \leq \gamma_n \forall n, z \in K$ und $\sum \gamma_n < \infty$, dann konvergiert $\sum f_n$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von G (**Normale Konvergenz auf kompakten Teilmengen von G**).

1.2 Ganze Funktionen sind durch ihre Nullstellen bestimmt

Definition 1.2 Eine Funktion heißt **ganz**, falls sie auf ganz \mathbb{C} holomorph ist. Eine Funktion heißt **ganz rational**, falls sie durch ein Polynom gegeben ist, sie heißt **rational**, falls sie Quotient zweier ganz rationaler Funktionen ist.

Weitere Bezeichnungen:

$Hol(\mathbb{C})$ ist der Ring der ganzen Funktionen. $Mer(\mathbb{C})$ sind die auf \mathbb{C} meromorphen Funktionen. \mathcal{P} sind die ganzen rationalen Funktionen ($\subseteq Hol(\mathbb{C})$, Teilring), $\mathcal{P}_{\neq 0}$ ist die multiplikative Halbgruppe der ganz rationalen Funktionen $\neq 0$.

Frage:

Ist $Mer(\mathbb{C}) \stackrel{?}{=} \text{Quotientenkörper von } Hol(\mathbb{C})$, d.h. ist jede meromorphe Funktion Quotient von zwei ganzen Funktionen?

Bemerkung: Jede ganz rationale Funktion ist (bis auf Multiplikation mit einer Konstanten) eindeutig durch die Lage und Vielfachheit ihrer Nullstellen bestimmt. (f ganz

1.2 Ganze Funktionen sind durch ihre Nullstellen bestimmt

rational, a_1, \dots, a_n Nullstellen $\Rightarrow f = \text{const} \cdot \prod_{i=1}^n (X - a_i)$

Nun folgt eine Präzisierung dieser Bemerkung mittels Divisortheorie:

Definition 1.3 Jeder (ganz) rationalen Funktion $f \neq 0$ ordnen wir ihren **Divisor** D_f zu:

$$D_f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{Z}, D_f(z) = \text{Ordnung von } f \text{ bei } z$$

$$\mathcal{D} := \{D : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{Z} \mid D_f(z) = 0, \text{ bis auf endlich viele Ausnahmen}\}$$

$$\text{Sei weiter: } \mathcal{D}^+ := \{D \in \mathcal{D} \mid D(z) \geq 0 \forall z \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathcal{D}$$

\mathcal{D} ist eine abelsche Gruppe (vermöge $(D_1 + D_2)(z) := D_1(z) + D_2(z)$), die **Gruppe der Divisoren auf \mathbb{C}** . D ist ein Maß für die »Lage und Vielfachheit der Nullstellen«.

Definition 1.4 Eine Sequenz

$$\dots \xrightarrow{\alpha_i} A_i \xrightarrow{\alpha_{i+1}} \dots$$

heißt **exakt**, falls bei A_i gilt: $\text{Bild}(\alpha_i) = \text{Kern}(\alpha_{i+1})$ und das für alle A_i in der Sequenz.

Satz 1.2 (Präzisierung der obigen Bemerkung) Die Sequenz

$$\mathbf{1} \xrightarrow[\text{I}]{\alpha} \mathbb{C}^x \xleftarrow[\text{II}]{\beta} \mathcal{P}_{\neq 0} \xrightarrow[\text{III}]{\gamma} \mathcal{D}^+ \xrightarrow{\delta} \mathbf{0}$$

von Homomorphismen ist exakt.

Beweis:

- exakt bei I bedeutet β ist injektiv: klar, da $\mathbf{1} = \{1\} \ni 1 \mapsto 1 \in \mathbb{C}^x$
- exakt bei III bedeutet γ ist surjektiv: klar, da δ alle $D \in \mathcal{D}^+$ auf $0 \in \mathbf{0} = \{0\}$ abbildet

- exakt bei II bedeutet: $\text{Kern}(\gamma) \simeq \mathbb{C}^x$

Beweis: β ist injektiv, da β einfach die Einbettung von \mathbb{C}^x in die Menge der Polynome ist, also $\forall c \in \mathbb{C}^x : \beta(c) = c \in \mathcal{P}_{\neq 0}$.

γ ist surjektiv, klar, da sich zu einem vorgegebenem $D \in \mathcal{D}^+$ leicht ein Polynom finden lässt, das die Nullstellen mit der richtigen Vielfachheit besitzt.

Nun ist zu zeigen, dass die Sequenz bei II exakt ist: Sei dazu $\gamma : \mathcal{P}_{\neq 0} \longrightarrow \mathcal{D}^+, f \mapsto D_f$.

\Rightarrow : sei $f \in \text{Bild}(\beta)$, dann ist f ein konstantes Polynom $\Rightarrow D_f \equiv 0$.

\Leftarrow : $f \in \text{Kern}(\gamma)$, d.h. $D_f \equiv 0 \Rightarrow f$ hat keine Nullstellen $\Rightarrow f$ ist konstant (folgt

1 Weierstraßscher Produktsatz

mittels Fundamentalsatz der Algebra).

Damit ist die gesamte Sequenz exakt. ■

Bemerkung: Der Satz sagt aus: $\mathcal{D}^+ \simeq \mathcal{P}_{\neq 0}/\mathbb{C}^x$.

Der Satz oben ist für ganz rationale Funktionen $(\mathcal{P}_{\neq 0}, \mathcal{D}^+)$ formuliert. Nun wird ein entsprechender Satz für rationale Funktionen angegeben:

Satz 1.3 Die Sequenz von Gruppenhomomorphismen

$$\mathbf{1} \longrightarrow \mathbb{C}^x \xrightarrow{\beta} \{\text{multi. Gruppe der rationalen Funktionen } \neq 0\} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{D} \longrightarrow \mathbf{0}$$

ist exakt.

Beweis: β ist injektiv, trivial (wie oben)

$\gamma : f \mapsto D_f$ ist surjektiv: zu $D \in \mathcal{D}$ definiere $D = D_+ + D_-$ vermöge:

$$D_+(z) := \begin{cases} D(z), & \text{falls } D(z) \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad D_-(z) := \begin{cases} D(z), & \text{falls } D(z) \leq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Nach dem vorigen Satz lassen sich nun zwei Polynome f, g angeben, mit $D_f = D_+$ und $D_g = -D_-$. Dann ist $D_{\frac{f}{g}} = D_f - D_g = D_+ + D_-$ und damit ist γ surjektiv.

Noch zu zeigen: $\text{Kern}(\gamma) = \text{Bild}(\beta)$, d.h. eine rationale Funktion ohne Null- oder Polstellen ist konstant. Das folgt aber wie oben. ■

Sei nun $f \neq 0$ eine ganze Funktion:

Definition 1.5 (Divisor für ganze Funktionen) Sei $D_f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $D_f(z) = \text{ord}_f(z)$, dann gilt für $D = D_f$

$$\{z \in \mathbb{C} \mid D(z) \neq 0\} \text{ hat keinen Häufungspunkt in } \mathbb{C} \text{ (ist also eine diskrete Menge)} \quad (*)$$

Das ist die Menge der Nullstellen von f .

Definiere nun:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\infty &:= \{D : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{Z} \mid D \text{ erfüllt } (*)\} \\ \mathcal{D}_c^+ &:= \{D \in \mathcal{D}_\infty \mid D(z) \geq 0 \forall z \in \mathbb{C}\} \end{aligned}$$

\mathcal{D}_∞ heißt **Divisor auf \mathbb{C}** .

Satz 1.4 Die Sequenz von Homomorphismen von Halbgruppen

$$\mathbf{0} \longrightarrow 2\pi i \mathbb{Z} \longrightarrow \underset{h \mapsto e^h}{\overset{\text{additiv}}{\longrightarrow}} \text{Hol}(\mathbb{C}) \xrightarrow{f \mapsto D_F} \mathcal{D}_C^+ \longrightarrow \mathbf{0}$$

ist exakt.

Folgerungen:

- **Satz 1.5** Jede auf \mathbb{C} meromorphe Funktion f ist Quotient zweier ganzer Funktionen.

Beweis: Sei D_f Divisor von f mit $D_f = D_+ + D_-$ (D_+, D_- wie oben). $D_+, -D_- \in \mathcal{D}_\infty^+$. Nach dem Satz existieren dann $h_1, h_2 \in Hol(\mathbb{C})_+$ mit $D_{h_1} = D_+, D_{h_2} = -D_-$. Dann ist $D_{\frac{h_1}{h_2}} = D_f$. D.h. $\frac{h_1}{h_2}/f \in Hol(\mathbb{C})$ und $D_{\frac{h_1}{h_2}/f} \equiv 0$, d.h. $\frac{h_1}{h_2}/f = e^h$ mit geeignetem $h \in Hol(\mathbb{C})$, d.h. $f = \frac{h_1}{h_2 e^h}$, wobei im Zähler und Nenner ganze Funktionen stehen. ■

- **Satz 1.6** Die Sequenz von Gruppen

$$0 \longrightarrow 2\pi i \mathbb{Z} \longrightarrow Hol(\mathbb{C}) \xrightarrow[h \mapsto e^h]{} Mer(\mathbb{C}) \xrightarrow[f \mapsto D_f]{} \mathcal{D}_\infty \longrightarrow 0$$

ist exakt

Beweis: Analog zum vorigen Beweis, schreibe $D \in \mathcal{D}_\infty$ als $D = D_+ + D_-$. ■

1.3 Ganze Funktionen ohne Nullstellen

Satz 1.7 Jede ganze Funktion f ohne Nullstellen schreibt sich in der Form $f = e^h$ mit geeigneter Funktion h .

Beweis: f hat keine Nullstellen, deshalb ist $\frac{f'}{f}$ auf \mathbb{C} holomorph und besitzt die Entwicklung

$$\frac{f'}{f}(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots \quad \forall z$$

Setze $h := b_0 + c_0 z + c_1 \frac{z^2}{2} + c_2 \frac{z^3}{3} + \dots$ mit $e^{b_0} = f(0)$ (das geht, da $f(0) \neq 0$ und $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ surjektiv ist). Dann ist $h' = \frac{f'}{f}$, betrachte $g = fe^{-h}$.

Zu zeigen: $g \equiv 1$, d.h. $g(0) = 1$ (ok nach Wahl von b_0) und $g' \equiv 0$:

$$g' = f'e^{-h} + fe^{-h}(-h') = \underbrace{f'e^{-h}}_{=e^{-h} f'} - fe^{-h} \frac{f'}{f} = 0.$$

■

1.4 Wiederholung Analysis I: Unendliche Produkte

Literatur zu diesem Abschnitt: Knopp: Unendliche Reihen und Produkte

Definition 1.6 Sei (c_n) eine Folge von komplexen Zahlen, dann heißt $\prod_{n=1}^{\infty} c_n$ (eigentlich) konvergent, falls gilt

1. $\exists n_0$, sodass $c_n \neq 0 \ \forall n \geq n_0$

1 Weierstraßscher Produktsatz

2. $\lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{n=n_0}^k c_n$ existiert und $\neq 0$ ist

Satz 1.8 1. Ein konvergentes Produkt ist genau dann 0, wenn einer seiner Faktoren gleich 0 ist

2. $\prod_{n=1}^{\infty} c_n$ ist konvergent genau dann, wenn

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0, r \geq 1 : |c_{n+1} \cdot \dots \cdot c_{n+r} - 1| < \epsilon \quad (*)$$

Folgerung

Mit $r = 1$ in $(*)$ folgt $\prod c_n$ konvergiert $\Rightarrow c_n \rightarrow 1$

Beweis:(von 1.8)

1. klar, folgt aus Definition der Konvergenz für unendliche Produkte

2. Sei o.B.d.A. alle $c_n \neq 0$

\Rightarrow : setze $P_k := \prod_{n=1}^k c_n$, dann ist $|P_k| \geq \sigma > 0$ für $k \gg 0$ und σ geeignet. Damit:
 $|c_{n+1} \dots c_{n+r} - 1| = \left| \frac{P_{n+r}}{P_n} - 1 \right| = \frac{|P_{n+r} - P_n|}{|P_n|} \leq \frac{|P_{n+r} - P_n|}{\sigma}$ für $n \gg 0$. Mit dem Cauchy-Kriterium folgt nun $(*)$.

\Leftarrow : Aus $(*)$ folgt insbesondere die Existenz eines n_0 mit $\left| \frac{P_{n_0+r}}{P_{n_0}} - 1 \right| < \epsilon \forall r \geq 1$. Es folgt die Existenz von $0 < c_1 < c_2$ mit $c_1 < |P_{n_0+r}| < c_2$ für alle $r \geq 1$ oder

$$c_1 < |P_n| < c_2 \text{ für } n > n_0 \quad (**)$$

Sei $\epsilon > 0$ gegeben: Dann existiert n_0 , sodass für $n \geq n_0, r \geq 1$ gilt:

$$\epsilon > \frac{|P_{n+r} - P_n|}{|P_n|} \geq \frac{|P_{n+r} - P_n|}{c_2} \text{ d.h. } |P_{n+r} - P_n| \leq c_2 \epsilon \text{ für } n \geq n_0, r \geq 1$$

Nach dem Cauchy-Kriterium ist P_n konvergent.

■

Definition 1.7 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + c_n)$ heißt **absolut konvergent**, falls $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + |c_n|)$ eigentlich konvergent ist.

Satz 1.9 Ist $\prod (1 + |c_n|)$ konvergent, dann ist auch $\prod (1 + c_n)$ konvergent.

Vor dem Beweis noch ein weiterer Satz:

Satz 1.10 Das Produkt $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + c_n)$ mit $c_n \geq 0 \forall n$ ist konvergent, genau dann wenn $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergent ist.

1.4 Wiederholung Analysis I: Unendliche Produkte

Beweis: (mittels eines Tricks, der unterstrichen ist) Sei wieder $P_n := \prod_{k=1}^n (1 + c_k)$ und $P_0 := 1$. Der Trick ist:

$$\begin{aligned}\underline{P_n - 1} &= P_n - P_{n-1} + P_{n-1} - P_{n-2} + \dots + P_1 - P_0 \\ &= \sum_{k=1}^n P_k - P_{k-1} \stackrel{P_{k-1}(1+c_k)=P_k}{=} \sum_{k=1}^n P_{k-1} c_k\end{aligned}$$

$\Leftarrow:$

$$1 \leq P_k = \prod_{l=1}^k (1 + c_l) \stackrel{1+x \leq e^x}{\leq} e^{\sum_{l=1}^k c_l} \leq e^{\sum_{l=1}^{\infty} c_l} =: const$$

Die Konvergenz der Reihe wird ja vorausgesetzt. Damit ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_{k-1} c_k \leq const \cdot \sum_{k=1}^{\infty} c_k < \infty$$

d.h. das »Partialprodukt« $P_n - 1$ konvergiert.

$\Rightarrow:$ Sei nun $\prod(1 + c_k)$ konvergent:

$$\sum_{k=1}^n c_k \stackrel{1 \leq P_k \forall k}{\leq} \sum_{k=1}^n P_{k-1} c_k = P_n - 1 < \infty \forall n$$

■

Beweis: (von 1.9) Sei o.B.d.A. $1 + c_k \neq 0 \forall k$. $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + |c_k|)$ sei konvergent (d.h. $\sum |c_k| < \infty$) und es ist $P_n - 1 \stackrel{Trick}{=} \sum_{k=1}^n P_{k-1} c_k$.

Zu zeigen: $\sum P_{k-1} c_k$ ist absolut konvergent und damit konvergent.

$$\begin{aligned}\sum |P_k - 1| |c_k| &\leq \sum \left(\prod_{l=1}^{\infty} 1 + |c_l| \right) \cdot c_k \\ &\leq \prod_{l=1}^{\infty} (1 + |c_l|) \sum c_k < \infty\end{aligned}$$

$\Rightarrow \lim P_n =: P$ existiert.

Noch zu zeigen: $P \neq 0$:

$$\log \left| \prod_{l=1}^k (1 + c_l) \right| = \sum_{l=1}^k \log |1 + c_l| \stackrel{asymptot.gleich}{\sim} \sum_{l=1}^k |c_l| > 0$$

denn $\log(1 + \gamma) \sim \gamma$ für $\gamma \rightarrow 0$

■

Satz 1.11 Ist $\prod 1 + c_k$ absolut konvergent, so ist für jede Bijektion $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ ist auch das Produkt $\prod(1 + c_{\sigma(k)})$ absolut konvergent und $\prod(1 + c_k) = \prod(1 + c_{\sigma(k)})$

Beweis: Zurückführen auf den entsprechenden Satz für Reihen. ■

Beispiel: 1.1 $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$ ist für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent, denn $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{n^2} < \infty$.

1.5 Unendliche Produkte holomorpher Funktionen

Satz 1.12 Sei (f_n) eine Folge von in einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ holomorphen Funktionen. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ sei gleichmäßig konvergent auf kompakten Teilmengen von G .

1. Dann ist $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n(z)) \forall z \in G$ konvergent. Die Grenzfunktion $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n(z))$ ist holomorph.
2. Es ist $f(z) = 0 \Leftrightarrow 1 + f_n(z) = 0$ für ein n
3. Ordnung von f bei $z \in G$ ist gleich $\sum_{n=1}^{\infty}$ (Ordnung von $f_n(z)$ bei z)

Beispiel: 1.2 $\prod (1 - \frac{z^2}{n^2})$ ist holomorph, Nullstellen: $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, Ordnung 1.

Beweis: (von 1.: Die Grenzfunktion $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n(z))$ ist holomorph. Die übrigen Punkte sind klar.) Sei $K \subseteq G$ kompakt, dann existiert ein m , sodass für $n \geq m, r \geq 1$ $\sum_{k=n}^{n+r} |f_k(z)| \leq \frac{1}{2}$ (denn $\sum |f_n|$ ist gleichmäßig konvergent). Betrachte $P_n := \prod_{k=m+1}^n (1 + f_k)$: P_n ist holomorph, zeige: $\lim P_n$ ist ebenfalls holomorph, sei dazu $n \geq m$:

$$\begin{aligned} P_n - P_m &= P_n - P_{n-1} + P_{n-1} - P_{n-2} + \dots + P_{m+1} - P_m \\ &= \sum_{k=m+1}^n (P_k - P_{k-1}) \stackrel{P_k = P_{k-1}(1+f_k)}{=} \sum_{k=m+1}^n P_{k-1} \cdot (f_k) \end{aligned}$$

Wir zeigen: die Reihe ist gleichmäßig konvergent auf K :

$$\begin{aligned} |P_{k-1}| &\leq \prod_{l=m+1}^{k-1} (1 + |f_l|) \stackrel{u \leq 0 \Rightarrow 1+u \leq e^u}{\leq} \prod_{l=m+1}^{k-1} e^{|f_l(z)|} \\ &= e^{\sum_{l=m+1}^{k-1} |f_l(z)|} < e^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Damit $\sum_{k=m+1}^n |P_{k-1}(z)f_k(z)| \leq e^{\frac{1}{2}} \sum_{k=m+1}^n |f_k(z)|$. Damit ist die Reihe auf der linken Seite gleichmäßig konvergent, da es die Reihe auf der rechten Seite ist. Also hat $\sum_{k=m+1}^n P_{k-1}f_k$ eine holomorphe Grenzfunktion, d.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} (P_n - P_m)$ ist holomorph. ■

Satz 1.13 Sei (f_n) eine Folge von in einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ holomorphen Funktionen. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ sei gleichmäßig konvergent auf kompakten Teilmengen von G . Dann ist die Reihe $\sum_{n \geq 1} \frac{f'_n}{1+f_n}$ absolut konvergent auf Teilmengen G' , wobei $G' = G \setminus \{\text{Nullstellen von } f\}$. Für jedes $z \in G'$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'_n(z)}{1+f_n(z)} = \frac{f''}{f}(z)$, wobei $f = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n)$.

1.6 Beweis des Weierstraßschen Produktsatzes

Bemerkung: G' ist offen: Ist $z_0 \in G'$, so existiert ein $\epsilon > 0$, sodass $\{z \in G \mid |z - z_0| < \epsilon\} \subseteq G'$.

Beweis: Mit den Bezeichnungen des vorigen Beweises: Sei $P_n := \prod_{l=m+1}^n (1 + f_l)$, $f = (1 + f_1) \cdot \dots \cdot (1 + f_n) \cdot F_m$, wobei $F_m := \prod_{l=m+1}^\infty (1 + f_l)$. Auf G' :

$$\frac{f'}{f} = \frac{f'_1}{1 + f_1} + \dots + \frac{f'_m}{1 + f_m}$$

$$F_m = \lim_{n \rightarrow \infty} (P_n - P_m) = \lim \sum_{k=m+1}^n P_{k-1} f_k = \sum_{k=m+1}^\infty P_{k-1} f_k$$

Die Reihe ist absolut und gleichmäßig konvergent auf kompakten Teilmengen von G' . Daher gilt:

$$F'_m = \lim_n \sum_{k=m+1}^\infty (P_{k-1} f_k)' = \lim_n P'_n - \underset{P_m=1 \Rightarrow P'_m=0}{P'_m} = \lim_n P'_n$$

Damit:

$$\frac{F'_m}{F_m}(z) = \lim_n \frac{P'_m}{P_m}(z) = \sum_{l=m+1}^n \frac{f'_l(z)}{1 + f_l(z)} = \sum_{l=m+1}^\infty \frac{f'_l}{1 + f_l(z)}$$

Zur gleichmäßigen absoluten Konvergenz auf kompakten Teilmengen $K \subseteq G'$: Sei $K \subseteq G'$ kompakt: Sei $\gamma_l := \min_{z \in K} |1 + f_l(z)|$. Es gibt in G' keine Nullstellen von $f \Rightarrow \gamma_l > 0$. Für $l \gg 0$ ist $\gamma_l \gg \frac{1}{2}$ (da für $l \gg 0$ $|f_l(z)| < \frac{1}{2}$ ist, ist $1 + f_l(z) \geq 1 - |f_l(z)| > \frac{1}{2}$). Also existiert ein $\gamma > 0$ mit $\gamma_l > \gamma \forall l$. Damit gilt auf K : $\sum_{l=1}^\infty \frac{|f'_l(z)|}{|1 + f_l(z)|} \leq \frac{1}{\gamma} \sum_{l=1}^\infty |f'_l(z)|$

Aber $\sum |f'_l|$ ist gleichmäßig konvergent auf kompakten Teilmengen von G' , da $\sum_{l=1}^\infty |f_l|$ gleichmäßig konvergent auf kompakten Teilmengen ist. ■

1.6 Beweis des Weierstraßschen Produktsatzes

Sei $D \in \mathcal{D}_\infty^+$ (d.h. $D : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{Z}, D(z) \geq 0 \forall z, T := \{z \in \mathbb{C} \mid D(z) > 0\}$ hat keinen Häufungspunkt in \mathbb{C}), zu konstruieren ist ein $f \in Hol(\mathbb{C})$ und $D_f = D$.

T ist abzählbar: jeder Kreis um 0 enthält nur endlich viele Punkte von T , sonst gäbe es Häufungspunkte. Sei z_1, z_2, \dots eine Aufzählung von T , da (z_n) keine Häufungspunkte in \mathbb{C} hat, gilt $\lim_n |z_n| = \infty$ (fast alle Folgeglieder liegen außerhalb eines Kreises um 0 mit Radius r). Sei $\alpha_n := D(z_n)$. O.B.d.A. sei $z_n \neq 0 \forall n$, sonst multipliziert man z_n mit der nötigen Vielfachheit an die konstruierte Funktion heran.

Idee: $\prod (z - z_n)^{\alpha_n}$, konvergiert im Allgemeinen nicht, besser ist $\prod (1 - \frac{z}{z_n})^{\alpha_n}$, aber auch das konvergiert im Allgemeinen nicht.

1 Weierstraßscher Produktsatz

Weierstraß: Wähle $k_1, k_2, \dots \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, sodass gilt $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\nu} \frac{z}{z_{\nu}}^{k_{\nu}+1}$ ist absolut konvergent $\forall z \in \mathbb{C}$. Setze damit

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} \left(\left(1 - \frac{z}{z_{\nu}}\right) e^{\frac{z}{z_{\nu}} + \frac{1}{2} \frac{z}{z_{\nu}} + \dots + \frac{1}{k_{\nu}} \left(\frac{z}{z_{\nu}}\right)^{k_{\nu}}} \right)^{\alpha_{\nu}} =: \prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n(z))$$

(Ist $k_{\nu} = 0$, so gilt die Konvention $e^{\frac{z}{z_{\nu}} + \dots} = e^0 = 1$).

Wir zeigen $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ ist gleichmäßig konvergent auf kompakten Teilmengen von \mathbb{C} : $f_n(z) = \left[\left(1 - \frac{z}{z_{\nu}}\right) e^{\frac{z}{z_{\nu}} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z_{\nu}}\right)^2 + \dots + \frac{1}{k_{\nu}} \left(\frac{z}{z_{\nu}}\right)^k} \right]^{\alpha_{\nu}} - 1$. Sei $R > 0$. Wir wollen gleichmäßige Konvergenz von $\sum |f_n|$ auf $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ nachweisen.

Sei m so gewählt, dass für $\nu > m$ gilt:

$$\left| \frac{R}{z_{\nu}} \right| \leq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \alpha_{\nu} \left(\frac{R}{|z_{\nu}|} \right)^{k_{\nu}+1} < \frac{1}{2}$$

Zur Abkürzung setze $u := \frac{z}{z_{\nu}}$, $k := k_{\nu}$, $\alpha := \alpha_{\nu}$ (also $|u| < \frac{1}{2}$, $\alpha |u|^{k+1} < \frac{1}{2}$).

$$|f_{\nu}(z)| = \left| \left[\left(1 - u\right) e^{u + \frac{1}{2} u^2 + \dots + \frac{1}{k} u^k} \right]^{\alpha_{\nu}} - 1 \right| \quad (*)$$

Feststellung:

$(1-u) = e^{-u - \frac{1}{2}u^2 - \dots - \frac{1}{k}u^k - \dots}$, da $\log(1-u) = -u - \frac{u^2}{2} - \dots - \frac{u^k}{k} - \dots$, diese Beobachtung liegt der Idee von Weierstraß zu Grunde.

Daher ist

$$\begin{aligned} (*) &= \left| e^{\alpha \left(-\frac{u^{k+1}}{k+1} - \dots \right)} - 1 \right| \\ &\leq e^{\alpha \left(\frac{|u|^{k+1}}{k+1} + \dots \right)} - 1 \quad , \text{ denn } |e^w - 1| = \left| w + \frac{w^2}{2!} + \dots \right| \leq |w| + \left| \frac{w^2}{2!} \right| + \dots = e^{|w|} - 1 \\ &\leq e^{\alpha |u|^{k+1} (1 + |u| + |u|^2 + \dots)} - 1 \\ &\leq e^{2\alpha |u|^{k+1}} - 1 \quad , \text{ denn } 1 + |u| + |u|^2 + \dots = \frac{1}{1 - |u|} < 2, \text{ für } |u| < \frac{1}{2} \\ &\leq 2\alpha |u|^{k+1} \underbrace{e^{2\alpha |u|^{k+1}}}_{\leq e^3} \quad , \text{ denn } e^x - 1 \leq x + \frac{x^2}{2!} + \dots \leq x(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots) = xe^x \\ &\leq 6\alpha |u|^{k+1} \quad , \text{ wobei } u = \frac{z}{z_{\nu}}, |z| < R \\ &\leq 6\alpha_{\nu} \left(\frac{R}{z_{\nu}} \right)^{k_{\nu}+1} \end{aligned}$$

Aber $6 \sum \alpha_{\nu} \left(\frac{R}{z_{\nu}} \right)^{k_{\nu}+1} < \infty$, damit ist $\sum |f_{\nu}|$ gleichmäßig konvergent, und damit konvergiert das Produkt und der Satz ist bewiesen. ■

Bemerkung: Die Wahl $k_\nu := \alpha_\nu + \nu$ ist stets ausreichend:

$$\sum_{\nu=l}^{\infty} \left| \alpha_\nu \left(\frac{z}{z_\nu} \right)^{\alpha_\nu + \nu + 1} \right| \underbrace{\leq}_{\frac{z}{z_\nu} < \frac{1}{2} \text{ für } \nu > l} \sum_{\nu=l}^{\infty} \left| \alpha_\nu \left(\frac{1}{2} \right)^{\alpha_\nu + \nu + 1} \right| \\ \underbrace{\leq}_{\frac{1}{\alpha_\nu} \frac{1}{2^{\alpha_\nu}} < 1} \sum_{\nu=l}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{\nu+1} < \infty$$

1.7 Beispiele zu dem Weierstraßschen Produktsatz

1.7.1 Produktdarstellung des Sinus

$$D_{\sin(\pi \cdot)}(z) = \begin{cases} 0 & \text{sonst} \\ 1 & z \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Zu betrachten ist: $\sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \left(\frac{z}{n} \right)^2$ ist absolut konvergent $\forall z \in \mathbb{C}$. Nach Weierstraß ist

$$f(z) = z \prod_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \left[\left(1 - \frac{z}{n} \right) e^{\frac{z}{n}} \right]$$

holomorph in \mathbb{C} und $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{\sin(\pi \cdot)}$. (Das Produkt wird mit z multipliziert, weil der sin eine Nullstelle bei 0 benötigt.)

Fazit: $\sin(\pi z) = e^h f(z)$ mit einer geeigneten ganzen Funktion h .

$$\text{Satz 1.14} \quad \frac{\sin \pi z}{\pi} = z \prod_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \left(1 - \frac{1}{n} \right) e^{\frac{z}{n}} = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n} \right) e^{\frac{z}{n}} \left(1 - \frac{z}{-n} \right) e^{\frac{z}{-n}} = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right)$$

(Auf der linken Seite wurde $\sin \pi z$ durch π geteilt, damit die Taylor Entwicklung mit z und nicht πz beginnt. Der Beweis für diesen Satz folgt an späterer Stelle.)

Bemerkung: Für $z = \frac{1}{2}$ folgt:

$$\pi = 2 \prod \frac{1}{1 - \frac{1}{4n^2}} = 2 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2 - 1}$$

Diese Darstellung von π heißt **Wallis Produkt**.

1.7.2 Die Weierstraßsche σ -Funktion

Definition 1.8 Eine Untergruppe $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ heißt **diskret**, falls $\forall z \in \mathbb{C}$ existiert eine offene Umgebung U von z mit $U \cap \Gamma \subseteq \{z\}$.

1 Weierstraßscher Produktsatz

Bemerkung: Ist $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ diskret, dann ist \mathcal{D}_Γ mit $\mathcal{D}_\Gamma = \begin{cases} 1 & z \in \Gamma \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ ein Element von \mathcal{D}_∞ .

Satz 1.15 Sei Γ eine diskrete Untergruppe. Dann gilt:

1. $\Gamma = \mathbb{Z}\omega$ für ein $\omega \in \mathbb{C}$

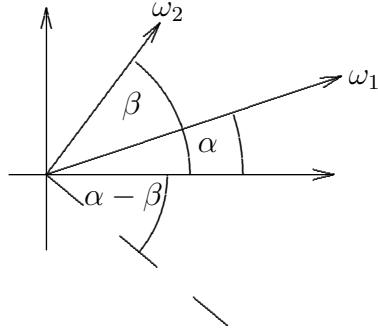
oder

2. $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ mit geeigneten $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$, $\omega_1, \omega_2 \neq 0$ und $\Im(\frac{\omega_1}{\omega_2}) \neq 0$. (Dabei bedeutet $\Im z$ den Imaginärteil von z)

Bemerkung:

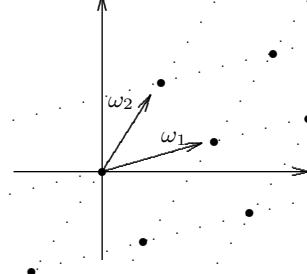
1. $\Im(\frac{\omega_1}{\omega_2}) \neq 0 \Leftrightarrow \omega_1, \omega_2$ sind linear unabhängig über \mathbb{R} . Bzw. $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ liegt nicht auf der reellen Achse (siehe Abbildung 1.1).
2. Ein Γ wie in 2. heißt **(vollständiges) Gitter** (siehe Abbildung 1.2)

Abbildung 1.1:



Sind α und β die Winkel, die zu ω_1 bzw. ω_2 gehören, so liegt $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ auf der gestrichelten Linie. Sind ω_1 und ω_2 kolinear, so liegt $\alpha - \beta$ auf der reellen Achse.

Abbildung 1.2:



Ein vollständiges Gitter besteht aus den Punkten, an denen sich die gepunkteten Linien schneiden.

Beweis: Ist $\Gamma = \{0\}$, so ist $\Gamma = \mathbb{Z}0$.

Sei nun $\Gamma \neq \{0\}$, also sei $\omega \in \Gamma$ und $\omega \neq 0$ wobei $|\omega|$ minimal ist (ein solches minimales ω existiert, da Γ diskret ist: es gibt eine offene Umgebung von 0, die nur endlich viele Punkte von Γ enthält).

Dann ist $\mathbb{R}\omega \cap \Gamma = \mathbb{Z}\omega$. (Ist $\gamma \in \mathbb{R}\omega$, so ist $\gamma = \eta\omega + \vartheta\omega$ mit $\eta \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq \vartheta < 1$, dann ist aber $|\vartheta\omega| = |\vartheta||\omega| < |\omega|$. Folglich ist $\vartheta = 0$, da ω minimal gewählt war.)

Ist $\Gamma = \mathbb{Z}\omega$, so ist der erste Fall gezeigt! Ist hingegen $\Gamma \neq \mathbb{Z}\omega$, so sind wir im zweiten Fall:

1.7 Beispiele zu dem Weierstraßschen Produktsatz

Wähle jetzt ein $\omega_2 \in \Gamma \setminus \mathbb{Z}\omega$, wobei ω_2 wieder minimal gewählt sei. Das ω von oben wird nun mit ω_1 bezeichnet.

Wir zeigen: $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$: sei $\alpha \in \Gamma$, schreibe $\alpha = (m + \vartheta_1)\omega_1 + (n + \vartheta_2)\omega_2$, wobei $m, n \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq \vartheta_1, \vartheta_2 < 1$ sei. Setze $\gamma := \vartheta_1\omega_1 + \vartheta_2\omega_2$, zu zeigen ist: $\gamma = 0$.

Jedenfalls ist $\gamma \in \Gamma$, damit ist entweder $\gamma = 0$ oder $\vartheta_1\vartheta_2 \neq 0$ (falls nur ein $\vartheta_i = 0$ ist, würde das die Minimalität des entsprechenden ω_i verletzen).

Sei nun $A = \{\phi_1\omega_1 + \phi_2\omega_2 \mid \phi_1 + \phi_2 \leq 1\}$ (siehe Abbildung 1.3).

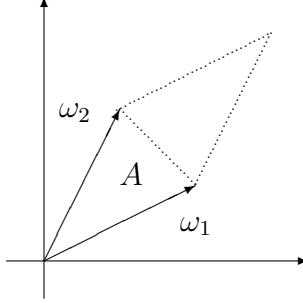


Abbildung 1.3: A ist die konvexe Menge in der unteren Hälfte des Parallelogramms inklusive der gestrichelten Diagonale .

Wir betrachten die Fälle:

$\gamma \in A$: Es gilt:

$$|\gamma| \leq |\phi_1| |\omega_1| + |\phi_2| |\omega_2| \leq (\phi_1 + \phi_2) |\omega_2|$$

Die letzte Abschätzung nutzt aus, dass $|\omega_1| \leq |\omega_2|$ gilt, da $|\omega_2|$ »nur«minimal in $\Gamma \setminus \mathbb{Z}\omega_1$ ist. Nun folgt $\underbrace{(\phi_1 + \phi_2)}_{\leq 1} |\omega_2| \leq |\omega_2|$.

$\gamma = \omega_2$ ist ausgeschlossen, da $\vartheta_2 < 1$ war. Ebenso scheidet $\gamma = \omega_1$ aus, da auch $\vartheta_1 < 1$ war. Der Fall $0 < |\gamma| < |\omega_2|$ verletzt die Minimalität von ω_2 . Es bleibt nur $\gamma = 0$.

$\gamma \notin A$: Dann ist $\gamma' := \omega_1 + \omega_2 - \gamma \in A$. $\gamma' = (1 - \vartheta_1)\omega_1 + (1 - \vartheta_2)\omega_2$, mit $1 - \vartheta_1 + 1 - \vartheta_2 < 1$
Es ist $\gamma' \in \Gamma$, wegen

$$\begin{aligned} |\gamma'| &\leq (1 - \vartheta_1) |\omega_1| + (1 - \vartheta_2) |\omega_2| \\ &\leq \underbrace{(1 - \vartheta_1 + 1 - \vartheta_2)}_{< 1} |\omega_2| \\ &< |\omega_2| \end{aligned}$$

Wie oben folgt $\gamma' = 0$.

1 Weierstraßscher Produktsatz

Damit ist dann $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$! ■

Bemerkung: ω_1, ω_2 sind nicht eindeutig durch Γ bestimmt, z. B. ist $\Gamma = \mathbb{Z} \cdot 1 + \mathbb{Z} \cdot i = \mathbb{Z} \cdot (1+i) + \mathbb{Z} \cdot i$.

Gesucht ist nun eine Funktion σ mit $D_\sigma(z) = \begin{cases} 1 & z \in \Gamma \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

Lemma 1.1 $\sum_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \gamma \neq 0}} \left(\frac{z}{\gamma}\right)^3$ ist absolut konvergent für jedes $z \in \mathbb{C}$.

Beweis: Zu zeigen ist $\sum_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \gamma \neq 0}} \left(\frac{z}{\gamma}\right)^3 < \infty$. Setze $P_n := \{x\omega_1 + y\omega_2 \mid (|x| = n \wedge |y| \leq n) \vee (|x| \leq n \wedge |y| = n)\}$ (siehe Abbildung 1.4).

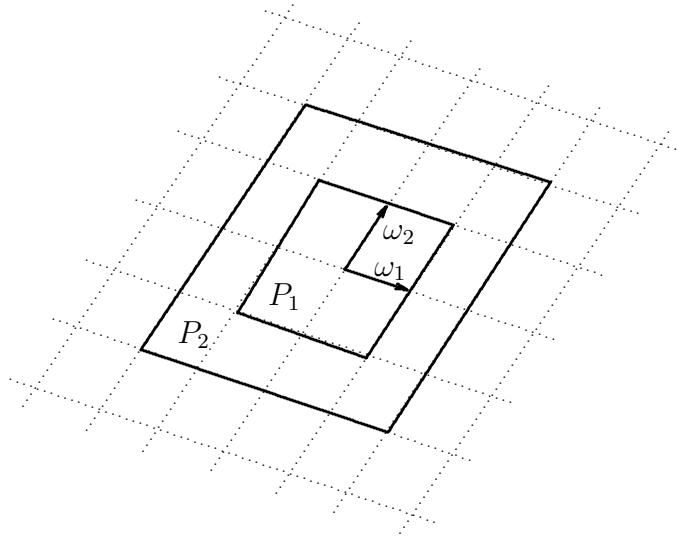


Abbildung 1.4: Die P_n sind konzentrische Parallelogramme.

$\gamma = x\omega_1 + y\omega_2 \in P_n, |\gamma| > nh$, wobei $h := \min(|\omega_1|, |\omega_2|)$. Damit

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}} \frac{1}{|\gamma|^3} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\gamma \in P_n} \frac{1}{|\gamma|^3} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\#P_n}{n^3 h^3} \leq \frac{8}{h^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty \\ \text{da } \#P_n &= 8n \end{aligned}$$

Definition 1.9 $\sigma(z, \Gamma) = z \prod_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \gamma \neq 0}} \left[\left(1 - \frac{z}{\gamma}\right) e^{\frac{z}{\gamma} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{\gamma}\right)^2} \right]$ heißt **Weierstraßsche σ -Funktion**.

Bemerkung: Das Produkt ist nach dem vorigen Lemma und dem Satz von Weierstraß absolut konvergent, für jedes z . σ ist eine holomorphe Funktion in \mathbb{C} , die Nullstellen sind die Punkte von Γ , sie sind von erster Ordnung.

Ausblick:

1. $D_\sigma = D_{\sigma(\cdot + \gamma, \Gamma)}$, $\gamma \in \Gamma$ ist fix, d.h. wir betrachten den Fall $f(z) = \sigma(z + \gamma, \Gamma)$ ($f(z_0) = 0 \Leftrightarrow z_0 + \gamma \in \Gamma \Leftrightarrow z_0 \in \Gamma$), also nach dem Satz von Weierstraß ist $\sigma(z, \Gamma)e^{h_\gamma(z)} = \sigma(z + \gamma, \Gamma)$. Es wird sich herausstellen, dass $h_\gamma(z)$ ein quadratisches Polynom in z ist.
2. $\sigma(z, \Gamma)$, als Funktion von z und Γ , ist eine so genannte **Jacobi-Funktion**.

1.7.3 Die Γ -Funktion

Definition 1.10 (nach C. F. Gauß)

$$\Gamma(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)(z+2) \cdots (z+n)}$$

für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$

Satz 1.16 Der Limes existiert $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$. Es gilt

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{C \cdot z} z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$$

Das ist die »Definition nach Euler«. Die Konstante ist $C = \lim_n (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n) \approx 0,57721\dots$, die **Euler-Mascheronische Konstante**.

Insbesondere ist $\Gamma(z)$ meromorph auf \mathbb{C} , hat Pole erster Ordnung in $\mathbb{Z}_{\leq 0}$, und $\Gamma(z)$ hat keine Nullstellen.

Beweis: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{n}\right)^2$ ist absolut konvergent $\forall z \in \mathbb{C}$. Daher ist $f(z) := z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent und holomorph in \mathbb{C} . $f(z)$ hat Nullstellen erster Ordnung bei $\mathbb{Z}_{\leq 0}$.

$$\begin{aligned} \lim_n \frac{z(z+1) \cdots (z+n)}{n! n^z} &= \lim_n \frac{z(1+z)(1+\frac{z}{2}) \cdots (1+\frac{z}{n})}{n^z} \quad \text{mit } n^z = e^{z \log n}: \\ &= \lim_n \exp \left(\left(z \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) - \log n \right) \right) z(1+z) \cdots (1+\frac{z}{n}) \exp \left(- \left(\frac{z}{1} + \dots + \frac{z}{n} \right) \right) \\ &= \exp \left(z \lim \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \right) \right) f(z) \\ &= e^{z \cdot C} f(z) \end{aligned}$$

■

1 Weierstraßscher Produktsatz

2 Die Γ -Funktion Die Gamma Funktion

$$\Gamma(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1) \cdot \dots \cdot (z+n)} = e^{-C \cdot z} \left[z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \right]^{-1}$$

Eigenschaften:

- Funktionalgleichung: $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$
- Beweis:**

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \lim \frac{n! n^{z+1}}{(z+1)(z+2) \cdot \dots \cdot (z+n+1)} \\ &= \lim_n \underbrace{\frac{n}{z+n+1}}_{\lim=1} \cdot z \cdot \frac{n! n^z}{z(z+1) \cdot \dots \cdot (z+n)} \\ &= z\Gamma(z) \end{aligned}$$

- Spezielle Werte:

- $\Gamma(1) = 1$ (Einsetzen in die Gauß-Definition)
- $\Gamma(n+1) = n!$ (Einsetzen in die Funktionalgleichung)

- $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$ (*)

Beweis:

$$\begin{aligned} \Gamma(z)\Gamma(1-z) &\stackrel{\text{Gauß}}{=} \lim \left(\frac{n^z}{z(1+z)(1+\frac{z}{2}) \cdot \dots \cdot (1+\frac{z}{n})} \cdot \right. \\ &\quad \left. \underbrace{\frac{n! n^{1-z}}{(1-z)(1-z+1) \cdot \dots \cdot (1-z+n)}}_{=\frac{n^{1-z}}{(1-z)(1-\frac{z}{2}) \cdot \dots \cdot (1-\frac{z}{n})} \frac{1}{n+1-z}} \right) \\ &= \lim \frac{1}{z(z-z^2)(1-(\frac{z}{2})^2) \cdot \dots \cdot (1-(\frac{z}{n})^2)} \\ &= \frac{\pi}{\sin \pi z} \end{aligned}$$

- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, da $\Gamma(\frac{1}{2})^2 = \pi$ (nach (*)) und $\Gamma(\frac{1}{2}) > 0$ nach der Gauß Definition.

2 Die Γ -Funktion Die Gamma Funktion

- $\text{Res}_{z=-\nu} \Gamma(z) = \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \quad (\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$

Beweis: Unter Beachtung von $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)} = \dots = \frac{\Gamma(z+\nu+1)}{z(z+1)\dots(z+\nu)}$ ergibt sich durch Einsetzen von $z = -\nu$ und nach Kürzen von $(z + \nu)$:

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow -\nu} \Gamma(z) &= \frac{\Gamma(1)}{-\nu(-\nu+1) \cdot \dots \cdot (-\nu+\nu-1)} \\ &= \frac{(-1)^\nu}{\nu(\nu-1) \cdot \dots \cdot 1}\end{aligned}$$

- Für $z = x + iy$ mit $x = \Re(z) > 0$ ist $|\Gamma(z)| \leq |\Gamma(x)|$

Beweis:

$$\left| \frac{n!n^z}{z(z+1)\cdot \dots \cdot (z+n)} \right| \leq \left| \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdot \dots \cdot (x+n)} \right|$$

wegen

$$\left| e^{(x+iy)\log n} \right| = \left| e^{x \log n} \right|, \text{ denn } \left| e^{iy \log n} \right| = 1, \text{ und } |z|^2 = x^2 + y^2 \geq x^2$$

Damit wird:

$$|\Gamma(z)| = \lim \left| \frac{n!n^z}{z(z+1)\cdot \dots \cdot (z+n)} \right| \leq \lim \left| \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdot \dots \cdot (x+n)} \right| = |\Gamma(x)|$$

- $\forall \beta < a \leq b$ existiert eine Konstante M , sodass $|\Gamma(z)| \leq M$ für $a \leq \Re(z) \leq b$. D.h. Γ ist auf senkrechten vertikalen Streifen beschränkt (siehe Abbildung 2.1). (Folgt aus dem vorigen Eigenschaft.)

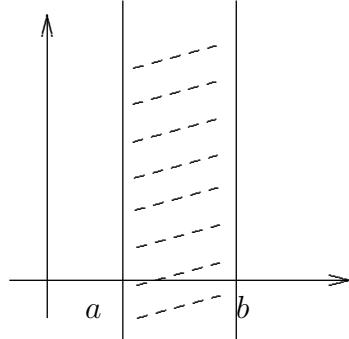


Abbildung 2.1: Γ ist auf dem gestrichelten Streifen beschränkt

Satz 2.1 Sei $\hat{f}(z)$ holomorph in $1 - \epsilon \leq \Re(z) \leq 2 + \epsilon$ für ein $\epsilon > 0$. Es gelte

1. $\hat{f}(z+1) = z\hat{f}(z) \quad \forall z \text{ mit } 1 - \epsilon \leq \Re(z), \Re(z+1) \leq 2 + \epsilon$

2. $|\hat{f}(z)|$ sei beschränkt in $1 \leq \Re(z) \leq 2$

3. $\hat{f}(1) = 1$

Dann kann man \hat{f} (eindeutig) zu einer in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$ holomorphen Funktion f fortsetzen und es gilt $f \equiv \Gamma$.

Beweis: Definiere f für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$ als:

$$f(z) := \begin{cases} (z-1) \cdot \dots \cdot (z-n) \hat{f}(z-n), & \text{falls } n+1-\epsilon \leq \Re(z) \leq n+2\epsilon \\ \frac{\hat{f}(z+n)}{z(z+1) \cdots (z+n-1)}, & \text{falls } -n+1-\epsilon \leq \Re(z) \leq -n+2+\epsilon \ (n > 0) \end{cases}$$

Mit (1.) folgt dass f wohldefiniert ist. Es ist f holomorph. In $\mathbb{Z}_{\leq 0}$ hat f Pole, und zwar von erster Ordnung. Für das $\text{Res}_{z=-n} f$ gilt:

$$\begin{aligned} \text{Res}_{z=-n} f(z) &= \lim_{z \rightarrow -n} (z+n)f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow -n} \frac{(z+n)f(z+n+1)}{z(z+1) \cdots (z+n)} = \frac{f(1)}{(-n)(-n+1) \cdots (-n+n-1)} \\ &= \frac{f(1)(-1)^n}{n!} \stackrel{f(1)=1}{=} \frac{(-1)^n}{n!} \end{aligned}$$

Es gilt $f(z+1) = zf(z) \forall z$ (zunächst nur für $\Re(z) = 1$ nach (1.), nach dem Identitätssatz für analytische Funktionen dann überall).

Setze $g(z) := \Gamma(z) - f(z)$, dann ist g holomorph in ganz \mathbb{C} (die Hauptteile heben sich gegenseitig auf) und $g(z+1) = zg(z) \forall z$ und $g(1) = 0$.

Setze $s(z) := g(z) \cdot g(1-z)$. s ist periodisch mit Periode 2 :

$$\begin{aligned} s(z+1) &= g(z+1)g(-z) = zg(z) \frac{g(z-1)}{-z} \\ &= -s(z) \\ \text{also: } s(z+2) &= -s(z+1) = (-(-s(z))) \end{aligned}$$

Ferner ist $s(z)$ beschränkt: $g(z) = g(x+iy)$ ist beschränkt in $B = \{z = x+iy \mid 0 \leq x \leq 1, |y| \geq 1\}$ (siehe Abbildung 2.2), weil $|g(z)| = \left| \frac{g(z+1)}{z} \right| \leq K$ nach (2.) und $|\Gamma(z)| \leq \Gamma(x)$ für $1 \leq \Re(z) \leq 2$. Ferner ist $g(z)$ holomorph, also auch beschränkt in $0 \leq x \leq 1, |y| \leq 1$. Fazit $g(1-z) \leq K$ in $0 \leq x \leq 1$. Dann ist auch $g(1-z) \leq K$ (Spiegelung an $\frac{1}{2}$). Also ist $s(z) \leq |g(z)| \cdot |g(1-z)| \leq K^2$ in $0 \leq x \leq 1$. Da $|s(z)|$ die Periode 1 hat, folgt $|s(z)| \leq K^2 \forall z \in \mathbb{C}$.

Also ist s nach Liouville konstant. $s(1) = \underbrace{g(1)g(0)}_{=0} \Rightarrow s \equiv 0$. Aus $0 \equiv s(z) = g(z)g(z-1)$

folgt $g \equiv 0$ (als Übungsaufgabe). ■

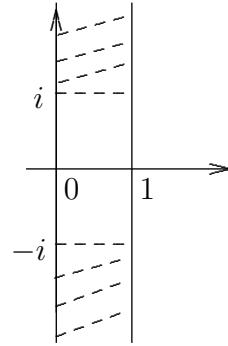


Abbildung 2.2: g ist in dem gestrichelten Bereich B beschränkt.

Satz 2.2 Für $\Re(z) > 0$ gilt:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^z \frac{dt}{t}$$

Beweis: (Nachweis der Konvergenz des Integrals: Analysis) Sei $f(z) := \int_0^\infty e^{-t} t^z \frac{dt}{t}$. Dann ist f holomorph in $\Re(z) > 0$ (siehe Übung).

$$|f(z)| \leq \int_0^\infty |e^{-t} t^z| \frac{dt}{t} = \int_0^\infty e^{-t} t^x \frac{dt}{t}$$

wegen: $|e^{(x+iy)\log n}| = |e^{x\log n}|$, denn $|e^{iy\log n}| = 1$

Insbesondere ist $f(z)$ beschränkt in $1 \leq x \leq 2$

$$f(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$$

$$f(z+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z+1} \frac{dt}{t}$$

partielle Integration:

$$\underbrace{[-e^{-t} t^z]_0^\infty}_{=0} + z \int_0^\infty e^{-t} t^z \frac{dt}{t}$$

$$= z f(z)$$

Nach dem vorangegangenen Satz ist dann $f \equiv \Gamma$. ■

In Abramowitz, Stegun: »Handbook of mathematical functions«, Seite 255 ff. finden sich weitere Formeln:

Duplication Formula: $\Gamma(2z) = \Gamma(z)\Gamma(z + \frac{1}{2})(2\pi)^{-\frac{1}{2}} 2^{2z-\frac{1}{2}}$

Triplikation Formula: $\Gamma(3z) = (2\pi)^{-1} \cdot 3^{(3z-\frac{1}{2})} \cdot \Gamma(z)\Gamma(z + \frac{1}{3})\Gamma(z + \frac{2}{3})$

n-Formula: $\Gamma(nz) = (2\pi)^{\left(\frac{1}{2}(1-n)\right)} \cdot n^{\left(nz-\frac{1}{2}\right)} \cdot \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma(z + \frac{k}{n})$

Stirlingsche Formel: $\Gamma(z) \sim e^{-z} e^{z-\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{1}{2}}$ für $|z| \rightarrow \infty$, $|\arg(z)| < \pi$

log. Ableitung: $\Psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$

2 Die Γ -Funktion Die Gamma Funktion

3 Die Riemannschen Flächen $\overline{\mathbb{C}}$, \mathbb{C} und \mathbf{h}

3.1 $\overline{\mathbb{C}}$ als Riemannsche Fläche

Sei f ganz auf \mathbb{C} , betrachte die Funktion $g(z) := f(\frac{1}{z})$, $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$. g ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. g hat die Laurent-Entwicklung $g = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$, d.h. $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^{-n}$ (»Laurent-Entwicklung von f bei ∞ «).

Fall 1: Es gibt unendlich viele $a_n \neq 0, n \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$, f hat eine **wesentliche Singularität bei ∞**

Fall 2: sonst: $ord_\infty f := \min\{n \in \mathbb{Z} \mid a_n \neq 0\}$, Sprechweisen:

$$ord_\infty f \begin{cases} > 0 & : \infty \text{ ist Nullstelle von } f, \quad f \text{ ist holomorph bei } a \\ < 0 & : \infty \text{ ist Pol,} \quad f \text{ ist meromorph} \\ = 0 & : a_0 := f(\infty), \quad f \text{ ist holomorph bei } \infty \end{cases}$$

Beispiel: 3.1 • $f(z) = a_n z^n + \dots + a_0, a_n \neq 0$, ein Polynom. $g(z) = f(\frac{1}{z}) = a_n \frac{1}{z^n} + \dots + a_0, ord_\infty f = -n = -grad f$

•

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-17} \\ g(z) &= f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{\frac{1}{z}-17} = z \frac{1}{1-17z} = z(1+17z+\dots) \\ &= ord_\infty f = 1 \end{aligned}$$

Definition 3.1 $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. $U \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ heißt offen, gdw.

$$\begin{cases} U \subseteq \mathbb{C} \text{ ist offen} \\ \text{oder} \\ \infty \in U, \text{ und } \mathbb{C} \setminus (U \setminus \{\infty\}) \text{ ist kompakt} \end{cases}$$

Bemerkung:

1. Offene Menge in $\overline{\mathbb{C}}$ sind $U \subseteq \mathbb{C}$, wobei U offen ist oder $(\mathbb{C} \setminus K) \cup \{\infty\}$, wobei $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt.

3 Die Riemannschen Flächen $\overline{\mathbb{C}}, \mathbb{C}$ und h

2. Ist $U \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ offene Umgebung von ∞ , dann ex. ein $R > 0$, sodass $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\} \subseteq U$ ist
3. $\overline{\mathbb{C}}$ ist kompakt (d.h. ist $\overline{\mathbb{C}} = \bigcup_{i \in I} U_i, U_i$ offen), dann existieren i_1, \dots, i_n mit $\overline{\mathbb{C}} = \bigcup_{k=1}^n U_{i_k}$)
4. $\overline{\mathbb{C}}$ ist homöomorph zu $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ (via stereographischer Projektion (siehe Abbildung 3.1))

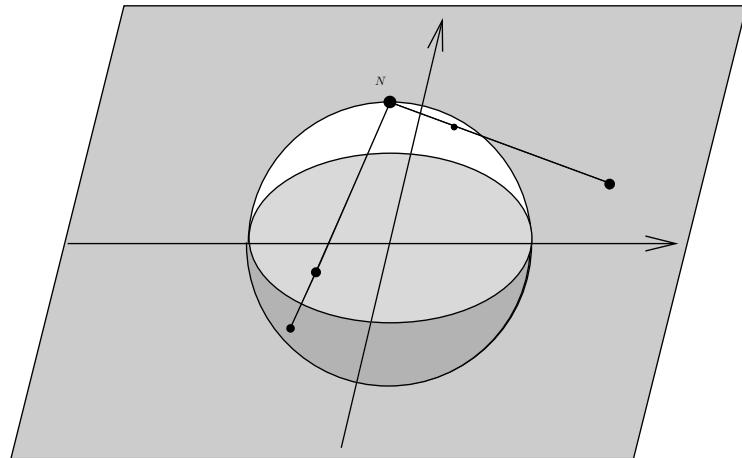


Abbildung 3.1: Die Stereographische Projektion vermittelt eine Isomorphie zwischen $\overline{\mathbb{C}}$ und S_2 .

5. $\overline{\mathbb{C}}$ ist homöomorph zu $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, der »projektiven Geraden über \mathbb{C} «.

Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} t_\infty &: \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}, & z \mapsto \frac{1}{z}, \infty \mapsto 0, & V_\infty := \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \\ t_0 &: \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{C}, & z \mapsto z, & V_0 := \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\} = \mathbb{C} \end{aligned}$$

t_∞ und t_0 heißen **Karten** bei ∞ bzw. bei 0.

Bemerkung: t_∞, t_0 sind **Homöomorphismen** (d.h. bijektive Abbildungen f , wobei f und f^{-1} stetig sind)

Definition 3.2 (Holomorphe Funktionen auf $U \subseteq \overline{\mathbb{C}}$) $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ ($U \subseteq \overline{\mathbb{C}}$) heißt **holomorph**, falls $f \circ t^{-1} : t(U \cap V) \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist für $t = t_\infty$ oder $t = t_0$ und $V = V_\infty$ bzw. $V = V_0$.

Äquivalent: Für jede Karte $t : V \longrightarrow \mathbb{C}$ existiert eine holomorphe Funktion $g : t(U \cap V) \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $f = g \circ t = g(t)$ (d.h. $f(z) = g(z)$ = holomorph, falls z aus der Umgebung eines Punktes von \mathbb{C} ist oder $f(z) = g(\frac{1}{z})$ mit holomorpem g , falls z in einer Umgebung von ∞ ist.)

Definition 3.3 (f meromorph auf $U \subseteq \overline{\mathbb{C}}, U$ offen) f heißt **meromorph** auf $U \subseteq \overline{\mathbb{C}}, U$ offen, falls es eine Menge von **isolierten Punkten** P gibt, sodass

1. $f : U \setminus P \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist
2. Für jede Karte $t : V \rightarrow \mathbb{C}$ ist $f = g(t)$ mit einer auf $t(V \cap U)$ meromorphen Funktion g mit Polen höchstens in $t(V \cap P)$

$Mer(U) :=$ Körper der auf U meromorphen Funktionen.

Bemerkung: $U \setminus P$ ist offen, da $P \subseteq U$ isoliert ist.

Beispiel: 3.2 Meromorphe Funktion f auf $\overline{\mathbb{C}} =$ eine auf \mathbb{C} meromorphe Funktion f , sodass ein $R > 0$ existiert, sodass f holomorph auf $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\}$ und $f(1/\tilde{z})$ hat höchstens einen Pol bei $\tilde{z} = 0$.

Eine auf $\overline{\mathbb{C}}$ meromorphe Funktion hat höchstens endlich viele Pole.

3.2 Meromorphe Funktionen auf $\overline{\mathbb{C}}$

$Mer(\overline{\mathbb{C}})$ ist ein Körper, $f \in Mer(\mathbb{C}), f \neq 0$ hat nur endlich viele Pole und Nullstellen.

Definition 3.4 Divisor einer meromorphen Funktion $f \in Mer(\overline{\mathbb{C}})$

$$\begin{aligned} Mer(\overline{\mathbb{C}}) &\ni f \rightsquigarrow D_f \\ D_f : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ D_f(z) &= \text{ord}_z f \end{aligned}$$

($\text{ord}_{\infty} f = \text{nwdw. } f(z) = g(\frac{1}{z}) \frac{1}{z^n}$ mit einer bei $\tilde{z} = 0$ holomorphen Funktion $g(\tilde{z})$, $f = g(t_{\infty})t_{\infty}^n$, g holomorph)

Beispiel: 3.3 $f(z) = \frac{z^3 - 1}{z^2 + 1}$ mit $\rho = e^{2\pi i/3}$:

$$\begin{array}{c|ccccccc} z & +i & -i & 1 & \rho & \rho^2 & \infty & \text{sonst} \\ \hline D_f(z) & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^3 - 1}{\left(\frac{1}{z}\right)^2 + 1} = \frac{\frac{1-z^3}{z^3}}{\frac{1+z^2}{z^2}} = \frac{1-z^3}{z} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+z^2}}_{\text{holom. bei } 0}$$

Feststellung: $\sum_{z \in \overline{\mathbb{C}}} D_f(z) = 0$

Satz 3.1 Für ein $f \in Mer(\overline{\mathbb{C}})$ gilt stets $\sum_{z \in \overline{\mathbb{C}}} D_f(z) = 0$

3 Die Riemannschen Flächen $\overline{\mathbb{C}}, \mathbb{C}$ und h

Beweis: Wähle ein $R > 0$, sodass f holomorph in $|z| > R - \epsilon > 0$ mit $\epsilon > 0$ ist. Dann gilt nach dem Satz von Rouché:

$$\begin{aligned}
2\pi i \sum_{z \in \mathbb{C}} D_f(z) &= \oint_{|z|=R} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \\
&= \oint_{|w|=\frac{1}{R}} \frac{f'(\frac{1}{w})}{f(\frac{1}{w})} d\left(\frac{1}{w}\right) = - \oint_{|w|=\frac{1}{R}} \frac{f'(\frac{1}{w})}{f(\frac{1}{w})} \left(-\frac{1}{w^2}\right) dw \\
&\stackrel{g(w):=f(\frac{1}{w})}{=} - \int \oint_{|w|=\frac{1}{R}} \frac{g'(w)}{g(w)} dw \stackrel{\text{Rouché}}{=} -\text{ord}_0 g \cdot 2\pi i \\
&= -2\pi i \cdot \text{ord}_{\infty} f = 2\pi i \sum_{z \in \mathbb{C}} D_f(z) \\
&\Rightarrow \sum_{z \in \overline{\mathbb{C}}} D_f(z) = 0
\end{aligned}$$

■

Lemma 3.1 $Hol(\overline{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}$, d.h. jede auf $\overline{\mathbb{C}}$ holomorphe Funktion ist konstant.

Beweis: $f \in Hol(\mathbb{C})$, da f stetig und $\overline{\mathbb{C}}$ kompakt ist, ist auch $f(\overline{\mathbb{C}})$ kompakt, d.h. $f(\overline{\mathbb{C}})$ ist beschränkt (d.h. $f(\overline{\mathbb{C}}) \subseteq \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ für ein $R > 0$). Also $f|_{\mathbb{C}}$ beschränkt, da $f|_{\mathbb{C}}$ holomorph ist, folgt mit dem Satz von Liouville: f ist konstant. ■

Definition 3.5 $Div(\overline{\mathbb{C}}) := \{D : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{Z} \mid D(z) \neq 0 \text{ für höchstens endlich viele } z \in \overline{\mathbb{C}}\}$

$$Div_0(\overline{\mathbb{C}}) := \{D : Div(\overline{\mathbb{C}}) \mid \sum_{z \in \overline{\mathbb{C}}} D(z) = 0\}$$

Bemerkung: $Div(\overline{\mathbb{C}})$ ist eine Gruppe, $Div_0(\overline{\mathbb{C}})$ ist eine Untergruppe.

Satz 3.2 Die Sequenz von Gruppenhomomorphismen

$$1 \longrightarrow \mathbb{C}^x \longrightarrow (Mer(\mathbb{C}))^x \xrightarrow[f \mapsto D_f]{*} Div_0(\overline{\mathbb{C}}) \longrightarrow 0$$

ist exakt.

Beweis: Exakt bei $*$: obiges Lemma, noch zu zeigen: $f \mapsto D_f$ ist surjektiv. Sei $D \in Div_0(\overline{\mathbb{C}})$, seien $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C}$ die Stellen mit $D(\alpha_i) > 0$ und seien β_1, \dots, β_n die Stellen mit $D(\beta_j) < 0$, sei $s_i := D(\alpha_i)$ und $t_j := D(\beta_j)$. Beachte $D(\infty) = \sum_{j=1}^n t_j - \sum_{j=1}^m s_j$ (wegen $D \in Div_0(\overline{\mathbb{C}})$).

$$\text{Setze } f = \frac{\prod_{j=1}^m (z - \alpha_j)^{s_j}}{\prod_{j=1}^n (1 - \beta_j)^{t_j}}, \quad f \in Mer(\overline{\mathbb{C}})$$

$$\text{Ferner: } D_f(\infty) = \sum t_j - \sum s_j, \quad \text{denn}$$

$$\text{bei } z = 0 : f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\prod_{j=1}^m (\frac{1}{z} - \alpha_j)^{s_j}}{\prod_{j=1}^n (\frac{1}{z} - \beta_j)^{t_j}} = z^{-\sum s_j + \sum t_j} \frac{\prod_{j=1}^m (1 - \alpha_j z)^{s_j}}{\prod_{j=1}^n (1 - \beta_j z)^{t_j}}$$

3.3 Automorphismen der komplexen Ebene

die rechte Seite ist holomorph bei $z = 0$ und hat dort den Wert 1. $\Rightarrow D(z) = D_f(z), z \in \mathbb{C}$ und auch $D(\infty) = D_f(\infty) \Rightarrow D = D_f$

■

Korollar (zum Beweis): $\text{Mer}(\bar{\mathbb{C}}) = \text{Körper der rationalen Funktionen!}$

3.3 Automorphismen der komplexen Ebene

Vorbemerkungen:

$\mathfrak{h} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$, \mathbb{C} , $\bar{\mathbb{C}}$ sind einfach zusammenhängend.

Riemannscher Abbildungssatz: Jede einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche ist isomorph zu \mathfrak{h} , \mathbb{C} oder $\bar{\mathbb{C}}$.

Satz: Zu jeder Riemannschen Fläche X existiert eine »holomorphe Überlagerung« $U \rightarrow X$, wobei $U = \mathbb{C}$, $\bar{\mathbb{C}}$ oder \mathfrak{h} ist. Es gilt dann

$$U/\Gamma \approx X$$

für eine geeignete diskrete Untergruppe Γ von $\text{Aut}(U)$.

Definition 3.6 $\text{Aut}(\mathbb{C}) := \{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ bijektiv, } f \text{ und } f^{-1} \text{ sind holomorph}\}$

Bemerkung:

1. $\text{Aut}(\mathbb{C})$ ist bzgl. \circ eine Gruppe
2. Man kann zeigen: $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ bijektiv und f holomorph $\Rightarrow f^{-1}$ holomorph

Beispiel: 3.4 1. $f(z) = az$, $a \neq 0$ $f \in \text{Aut}(\mathbb{C})$ $a = re^{i\vartheta}, r > 0$: Drehung um ϑ , Streckung um r

2. $g(z) = z + b$, $b \in \mathbb{C}$: Translation um b
3. Allgemein sind Polynome ersten Grades $\in \text{Aut}(\mathbb{C})$ ($h(z) = az + b$)

Satz 3.3 $\text{Aut}(\mathbb{C})$ besteht aus allen Transformationen der Gestalt $z \mapsto az + b$ ($a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$)

Beweis:

\supseteq klar

\subseteq Sei $f \in \text{Aut}(\mathbb{C})$, betrachte f bei $z = \infty$, d.h. $f(\frac{1}{z})$ bei $z = 0$

Fall 1: f hat bei ∞ höchstens einen Pol: dann ist f aber rationale Funktion (da $\text{Mer}(\mathbb{C}) = \text{rationale Funktionen}$). Da f keine Pole in \mathbb{C} hat, d.h. f ganz rational, ist $f = \text{Polynom}$. Da f injektiv, folgt $\deg(f) = 1$

3 Die Riemannschen Flächen $\overline{\mathbb{C}}, \mathbb{C}$ und h

Fall 2: f hat eine wesentliche Singularität bei $z = \infty$ d.h. $f(\frac{1}{z})$ hat eine Singularität bei $z = 0$. f injektiv $\Rightarrow f(\{|z| < 1\}) \cap f(\{|z| > 1\}) = \emptyset$. Das steht im Widerspruch zum Satz von Weierstraß (siehe unten): nach Weierstraß existiert nämlich eine Folge (z_k) mit $|z_k| \rightarrow \infty$ und $f(z_k) \rightarrow f(0)$. Insbesondere gilt dann für $k \gg 0, |z_k| > 1$ $f(z_k) \in f(|z| < 1)$ offene Umgebung von $f(0)$.

■

Satz 3.4 (von Weierstraß) Sei f eine ganze Funktion auf \mathbb{C} . Hat f bei ∞ eine wesentliche Singularität, dann gilt: zu jedem $w_0 \in \mathbb{C}$ existiert eine Folge (z_n) mit $|z_n| \rightarrow \infty$ und $f(z_n) \rightarrow w_0$

Beweis: Widerspruchsannahme: Es gebe ein $w_0 \in \mathbb{C}$ und ein $\epsilon > 0$, sodass $\forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z > R|$ gilt: $|f(z) - w_0| \geq \epsilon$

Zu zeigen: f ist ein Polynom.

Auf $\{|z| < R\}$ hat f (als ganze Funktion nur endlich viele Nullstellen z_1, \dots, z_m mit Ordnungen $\alpha_1, \dots, \alpha_m$). Definiere nun

$$h = \frac{f(z) - w_0}{\prod_{j=1}^m (z - z_j)^{\alpha_j}}$$

Dann hat h keine Nullstellen. Ferner gilt

$$|h(z)| = \frac{|f(z) - w_0|}{\prod |(z - z_j)|^{\alpha_j}} \geq \frac{\epsilon}{\prod |z - z_j|^{\alpha_j}} \quad \text{für } |z| > R$$

$g := \frac{1}{h}$ ist ganz auf \mathbb{C} , da h keine Nullstellen hat und es gilt $|g(z)| \leq \frac{1}{\epsilon} \prod |z - z_j|^{\alpha_j}$ für $(|z| > R)$

Dann existiert c_1, c_2 sodass $|g(z)| \leq c_1 + c_2 |z|^{\sum_{j=1}^m \alpha_j}$ für alle z . Nach dem verallg. Satz von Liouville (siehe unten) ist g ein Polynom vom Grad $\leq n$. Da g ferner keine Nullstellen hat, ist $g = c$ (c konstant), $h = \frac{1}{c}$ und $f = \frac{1}{c} \prod (z - z_j)^{\alpha_j} + w_j$. ■

Bemerkung: f bei ∞ keine wesentliche Singularität $\Leftrightarrow f$ ist Polynom.

Satz 3.5 (verallg. Satz von Liouville) Sei f ganz auf \mathbb{C} , es gebe c_1, c_2, n , sodass $|f(z)| \leq c_1 + c_2 |z|^n \forall z \in \mathbb{C}$. Dann ist f ein Polynom vom Grad $\leq n$.

Beweis: Wir zeigen $f^{(n+1)} \equiv 0$. Sei $z \in \mathbb{C}, r > 0$, dann ist

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(z) &= \frac{(n+1)!}{2\pi i} \oint_{|w-z|=r} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+2}} dw \\ &= \frac{(n+1)!}{2\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{f(w)}{r^{n+2}} e^{-i\theta(n+2)} r e^{i\theta} d\theta \quad (w = z + ei\theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi) \\ |f^{n+1}(z)| &\leq \frac{(n+1)!}{2\pi} \frac{1}{r^{n+1}} \int_{\theta=0}^{2\pi} \underbrace{|f(w)|}_{\leq c_1 + c_2(|z|+r)^n} d\theta \\ &\leq (n+1)! \frac{(c_1 + c_2(|z|+r)^n)}{r^{n+1}} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

■

Satz 3.6 (Kleiner Satz von Picard) Sei f ganze Funktion auf \mathbb{C} und f sei nicht konstant, dann hat die Menge $\mathbb{C} \setminus f(\mathbb{C})$ höchstens ein Element. (Ohne Beweis)

3.4 Die Automorphismen von $\overline{\mathbb{C}}$

Definition 3.7 $f : U \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ ($U \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ offen) heißt **holomorph**, falls f stetig und für alle $a \in U$ gilt

1. ist $f(a) \in \mathbb{C}$ und ist $a \in V \subseteq U$ mit $f(V) \subseteq \mathbb{C}$, dann ist $f|_V$ holomorph
2. ist $f(a) = \infty$ und ist $a \in V \overset{\text{offen}}{\subseteq} U$ mit $f(V) \subseteq \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$, dann ist $\frac{1}{f|_V}$ holomorph
(der Nenner ist auf V niemals 0), es gilt die Konvention $\frac{1}{f(a)} = \frac{1}{\infty} := 0$

Äquivalent: Sind t_1, t_2 Karten auf $\overline{\mathbb{C}}$, so ist $t_1 \circ f \circ t_2^{-1}$ holomorph auf $V_2 \cap U \cap f^{-1}(V_1)$, wobei $t_i : V_i \rightarrow \mathbb{C}$.

Beispiel: 3.5 1. Sei f meromorph auf $U \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ (U offen). Setze $\tilde{f}(a) = \infty$, falls a ein Pol von f ist und $\tilde{f}(a) = f(a)$ sonst. Dann ist $\tilde{f} : U \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ holomorph.

2. Sei $g : U \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ holomorph, dann ist $g|_{g^{-1}(\infty)}$ meromorph auf U .

Fazit: $\overline{\mathbb{C}}$ -wertig holomorph = \mathbb{C} -wertig meromorph.

Definition 3.8 $\text{Aut}(\overline{\mathbb{C}}) := \{f : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}} \mid f \text{ ist holomorph und } f^{-1} \text{ ist holomorph}\}$

Bemerkung: $\text{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ ist eine Gruppe bzgl. \circ . Ein f mit f, f^{-1} holomorph heißt auch **biholomorph**.

Beispiel: 3.6 1. Die Elemente von $\text{Aut}(\mathbb{C})$ lassen sich zu einem Element von $\text{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ fortsetzen: ist $f \in \text{Aut}(\mathbb{C})$, etwa $f(z) = az + b$, so setze fort auf $\overline{\mathbb{C}}$ via $f(\infty) = \infty$.

3 Die Riemannschen Flächen $\overline{\mathbb{C}}, \mathbb{C}$ und h

Holomorphie bei ∞ : $\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{az+b}$ ist holomorph bei ∞ , d.h. zu zeigen: $\frac{1}{f(\frac{1}{z})} = \frac{1}{a\frac{1}{z}+b}$ ist holomorph bei $z=0$: $\frac{1}{a\frac{1}{z}+b} = z(a-bz \pm \dots)$ ok

2. $S(z) = \frac{1}{z}$ ist auch in $Aut(\overline{\mathbb{C}})$.

3. Komposition von (1.), (2.): $z \mapsto \frac{1}{az+b}a' + b'$, $a, a' \neq 0$ ist in $Aut(\overline{\mathbb{C}})$, denn

$$\frac{1}{az+b}a' + b' = \frac{a' + b'(az+b)}{az+b} = \frac{a''z + b''}{c''z + d''}$$

Definition 3.9 Für ein $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$ setze $f_A := \frac{az+b}{cz+d}$

Erinnerung: $GL(2, \mathbb{C}) := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2} \mid ad - bc \neq 0 \right\}$,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Beispiel: 3.7 $f_{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} = \frac{1}{z}$

Satz 3.7 Die Zuordnung $A \mapsto f_A$ definiert eine exakte Sequenz von Gruppen:

$$1 \longrightarrow C^x \longrightarrow GL(2, \mathbb{C}) \longrightarrow Aut(\overline{\mathbb{C}}) \longrightarrow 1$$

(d.h. $GL(2, \mathbb{C}) \longrightarrow Aut(\overline{\mathbb{C}})$ ist wohldefiniert und surjektiv und der Kern ist $\left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{C}^x \right\} = \mathbb{C}^x \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \approx \mathbb{C}^x$)

Beweis:

1. Für $A, B \in GL(2, \mathbb{C})$ ist dann $f_A \circ f_B = f_{AB}$. Sei $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$,

$$\begin{aligned} f_A(f_B) &= \frac{a \frac{a'z+b'}{c'z+d'} + b}{c \frac{a'z+b'}{c'z+d'} + d} = \frac{a(a'z+b') + b(c'z+d')}{c(a'z+b') + d(c'z+d')} \\ &= \frac{(aa' + bc')z + ab' + bd'}{(ca' + dc')z + cb' + dd'} \end{aligned}$$

2. $f_{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}(z) = z$

Nach (1.) und (2.) folgt: f_A ist bijektiv, denn $f_A \circ f_{A^{-1}} = f_{A^{-1}} \circ f_A = id$. f_A ist ($\overline{\mathbb{C}}$ -wertig) holomorph als rationale Funktion und $f_A^{-1} = f_{A^{-1}}$

Fazit: $f_A \in Aut(\mathbb{C})$.

3. Kern: sei $f_A = id$, $\forall z : \frac{az+b}{cz+d} = z \Leftrightarrow \forall z : az + b = z(cz + d)$, d.h. $c = 0, a = d, b = 0$, also $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$

4. $A \mapsto f_A$ ist surjektiv: Jedenfalls ist $Aut(\overline{\mathbb{C}})_\infty := \{f \in Aut(\overline{\mathbb{C}}) \mid f(\infty) = \infty\}$ isomorph zu $Aut(\mathbb{C})$ vermöge $f \mapsto f|_{\mathbb{C}}$. $Aut(\mathbb{C})$ sind die Polynome vom Grad 1, d.h. $Aut(\overline{\mathbb{C}})_\infty = \left\{ f_{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \mid \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in GL(2, \mathbb{C}) \right\}$.

Sei $g \in Aut(\overline{\mathbb{C}})$, sei $g(\infty) = a$. Ist $a = \infty$, so ist $g|_{\mathbb{C}} \in Aut(\mathbb{C})$ ein Polynom ersten Grades, die zugehörige Matrix ist $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Sei also $a \neq \infty$. Setze $f(z) := \frac{1}{z-a}, f \in Aut(\overline{\mathbb{C}}), f(a) = \infty$. Daher $f \circ g \in Aut(\overline{\mathbb{C}}), f \circ g(\infty) = \infty, f \circ g \in Aut(\overline{\mathbb{C}})_\infty, g \in \underbrace{f^{-1} \circ Aut(\overline{\mathbb{C}})_\infty}_{\in Bild(GL(2, \mathbb{C}))}$.

■

Bemerkung:

- $Aut(\overline{\mathbb{C}})_\infty$ heißt **Standgruppe** oder **Stabilisator**
- $z \mapsto \frac{1}{z}, z \mapsto az (a \mathbb{C}^x), z \mapsto z + b$ also zwei Spiegelungen bzw die Inversion, Drehstreckung und Translation erzeugen schon $Aut(\overline{\mathbb{C}})$
- $f = \frac{az+b}{cz+d}, ad - bc$ heißt **Möbius-Transformation**

Satz 3.8 Sei $a, b, c \in \overline{\mathbb{C}}$. Dann gibt es genau ein $f \in Aut(\overline{\mathbb{C}})$ mit $f(a) = 1, f(b) = 0, f(c) = \infty$.

Beweis: $f := [z, a, b, c] := \frac{z-b}{a-b} : \frac{z-c}{a-c} \in Aut(\overline{\mathbb{C}})$ (dabei bedeutet: eine Division) (Da $a-b$ und $a-c$ Konstanten sind, ist $[z, a, b, c]$ bis auf diese Konstante $= \frac{z-b}{z-c} = f_A$, mit $A = \begin{bmatrix} 1 & -b \\ 1 & -c \end{bmatrix}, det A = b - c \neq 0$) f erfüllt die Forderung $f(a) = 1, f(b) = 0, f(c) = \infty$ (Nachrechnen!), $[z, a, b, c]$ heißt **Doppelverhältnis**.

Zur Eindeutigkeit: Ist $g \in Aut(\overline{\mathbb{C}})$ und $g : a, b, c \mapsto 1, 0, \infty$. Dann hat $g \circ f^{-1}$ drei Fixpunkte bei $1, 0$ und ∞ . Wir zeigen: hat $h \in Aut(\overline{\mathbb{C}})$ mehr als 3 Fixpunkte, dann gilt $h = id$.

Sei $h \in Aut(\overline{\mathbb{C}}) :$ dann $h(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad ad - bc \neq 0$ (nach Satz 3.7). Bestimmung der Fixpunkte:

$$\begin{aligned} \frac{az+b}{cz+d} = z &\Rightarrow az + b = z(cz + d) \\ cz^2 + (d-a)z - b &= 0 \end{aligned} \tag{*}$$

3 Die Riemannschen Flächen $\overline{\mathbb{C}}, \mathbb{C}$ und h

Hat h mehr als 3 Fixpunkte, alle $\neq \infty$, dann sind die Fixpunkte Lösungen von (*), also $c = 0, d = a, b = 0$, also $h = id$.

Ist ein Fixpunkt $= \infty$, dann ist $c = 0$ (und h Polynom vom Grad 1), hat h noch mehr als 2 Fixpunkte so sind diese Lösung von (*), also $d = a, b = 0$. ■

3.5 Die Automorphismen von \mathfrak{h}

Notation: Statt $f_A(z)$ schreibt man Az und meint $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} z = \frac{az+b}{cz+d}$.

Zur Wiederholung: $\mathfrak{h} := \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}$, $Aut(\mathfrak{h}) := \left\{ f : \mathfrak{h} \xrightarrow{\text{bijektiv}} \mathfrak{h} \mid f, f^{-1} \text{ holomorph} \right\}$.

Definition 3.10 Seien X, Y Riemannsche Flächen (z.B.: offene Teilmenge von $\overline{\mathbb{C}}$), dann heißen X und Y **biholomorph äquivalent**, falls ein $f : X \rightarrow Y$ existiert, sodass f bijektiv ist und f, f^{-1} holomorph sind.

Bemerkung: $Aut(X) = f^{-1} \circ Aut(Y) \circ f$

Satz 3.9 \mathfrak{h} ist biholomorph äquivalent zu $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

Beweis: Betrachte die Abbildung $f : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{D}, f(z) := \frac{z-i}{z+i}$.

$$\begin{aligned} |f(z)| < 1 &\iff |z+i|^2 > |z-i|^2 \iff (y+i)^2 > (y-i)^2 \\ &\iff 2y > -2y \iff y > 0 \end{aligned}$$

■

Bemerkung:

1. Die Umkehrabbildung zu f ist $f^{-1} = f_{\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix}^{-1}} = f_{\begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}$
 $f^{-1}(w) = \frac{1}{i} \frac{w+1}{w-i} : \mathbb{D} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}$

2. Es gibt zu $f : \mathfrak{h} \xrightarrow{\text{biholomorph}} \mathfrak{h}$ unendlich viele weitere: $\beta \circ f \circ \alpha$ mit $\alpha \in Aut(\mathfrak{h}), \beta \in Aut(\mathbb{D})$.

Beispiel: 3.8 Sei $A \in GL(2, \mathbb{R})$ (hier ist wirklich \mathbb{R} nicht \mathbb{C} gemeint!):

$$\begin{aligned} \Im f_A(z) &= \Im \frac{az+b}{cz+d} = \Im \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2} \\ &= \frac{(ad-bc)}{|cz+d|^2} \Im z \end{aligned}$$

Also $f_A \in Aut(\mathfrak{h}) \iff A \in GL(2, \mathbb{R})^+$. Mit $GL(2, \mathbb{R})^+ := \{A \in GL(2, \mathbb{R}) \mid \det A > 0\}$

3.5 Die Automorphismen von \mathfrak{h}

Satz 3.10 Die Zuordnung $A \mapsto f_A$ definiert eine exakte Sequenz von Gruppenhomomorphismen

$$\mathbf{1} \longrightarrow \mathbb{R}^x \xrightarrow[a \mapsto \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}]{} GL(2, \mathbb{R})^+ \xrightarrow[A \mapsto f_A]{} Aut(\mathfrak{h}) \longrightarrow \mathbf{1}$$

Alternative Formulierung: Die Zuordnung $A \mapsto f_A$ definiert eine exakte Sequenz von Gruppenhomomorphismen

$$\mathbf{1} \longrightarrow \mathbb{R}^x \xrightarrow[a \mapsto \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}]{} SL(2, \mathbb{R}) \xrightarrow[A \mapsto f_A]{} Aut(\mathfrak{h}) \longrightarrow \mathbf{1}$$

denn $f_A = f\left(\underbrace{\frac{1}{\det A} A}_{\det=1}\right)$.

Beweis: (der ersten Formulierung) Sei $g \in Aut(\mathfrak{h})$, z.z. $g = f_A$ mit einem $A \in GL(2, \mathbb{R})^+$.

Betrachte $w := g(i) \quad w = u + iv$. Betrachte $A = \begin{bmatrix} \sqrt{v} & \frac{u}{\sqrt{v}} \\ 0 & \sqrt{v}^{-1} \end{bmatrix}$, $A \in SL(2, \mathbb{R})$, $A \cdot i = \sqrt{v}i + u + iv = w$.

Also $f_{A^{-1}} \circ g \in Aut(\mathfrak{h})$, wir zeigen

$$Aut(\mathfrak{h})_i = \{f_A \mid A \in SO(2, \mathbb{R})\}$$

(Zur Wiederholung: $SO(2\mathbb{R}) =$

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \mid 0 \leq \theta < 2\pi \right\} =$$

Matrix der \mathbb{R} -linearen Abbildungen $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto ze^{i\theta}$ bzgl. der \mathbb{R} -Basis $\{1, i\}$)

Sei $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}$, $f_A : \mathbb{D} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}$, $f_A^{-1} \circ Aut(\mathfrak{h})_i \circ f_A = Aut(\mathbb{D})_0$.

Es gilt für $M \in GL(2, \mathbb{R})^+$: $M \in SO(2\mathbb{R}) \iff A^{-1}MA = c \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \bar{\alpha} \end{bmatrix}$ mit $c \in \mathbb{R}^x$ und $\alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| = 1$.

$(\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}))$:

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}}_A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} a - ib & 0 \\ 0 & a + ib \end{bmatrix}$$

$$\text{denn } \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - ib \\ b + ia \end{pmatrix} = (a - ib) \underset{\substack{\text{Skalar-} \\ \text{Multipl.}}}{\cdot} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

(Eigenwertgleichung).

Die andere Richtung folgt durch Nachrechnen!

3 Die Riemannschen Flächen $\overline{\mathbb{C}}, \mathbb{C}$ und h

Also zu zeigen: $\underline{Aut(\mathbb{D})}_0 = \left\{ f_N \mid N = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \bar{\alpha} \end{bmatrix} \right\} = \underline{\{g \mid \exists s \in S^1 : g(z) = sz\}}$ (Dabei ist $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$).

Das Unterstrichene folgt aber aus dem folgenden Lemma. ■

Lemma 3.2 Ist $h \in Aut(\mathbb{D})$, dann $|h(z)| \leq |z|$, d.h. für $|h^{-1}(w)| \leq |w|$, d.h. mit $w = h(z) : |z| \leq h(z)$

Satz 3.11 (Lemma von Schwarz) Sei $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $f(0) = 0, |f(0)| < 1$ für $|z| < 1$, dann gilt:

1. $|f(z)| \leq |z| \forall |z| \leq 1$
2. Ist $|f(z_0)| = |z_0|$ für ein $z_0 \neq 0$, dann ist $f(z) = \lambda z$ mit geeignetem $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1$

Beweis: Setze $g(z) := \frac{f(z)}{z}$ da $f(z) = 0$, folgt g holomorph in \mathbb{D} . Ferner $|g(z)| \leq \frac{1}{r}$ für $|z| = r < 1$, da $|f(z)| \leq 1$. Nach dem Maximumsprinzip folgt sogar $|g(z)| \leq \frac{1}{r} \forall z \leq r$.

Für $r \rightarrow 1$ folgt: $|g(z)| < 1$, d.h. $|f(z)| \leq |z|$ für $z \in \mathbb{D}$. Gilt $|f(z_0)| = |z_0|$ für ein z_0 , dann $|g(z_0)| = 1$, also hat $|g|$ ein Maximum in \mathbb{D} , also ist $g = \text{const}$, etwa $g = \lambda$ mit $|\lambda| = 1$. ■

Bemerkung: U.a. haben wir gezeigt:

$$SL(2, \mathbb{R})/SO(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{h}, A \longmapsto A_i$$

ist bijektiv. $SL(2, \mathbb{R})$ ist eine Lie-gruppe, $SO(2, \mathbb{R})$ ist eine kompakte maximale Untergruppe.

3.6 Ergänzungen

Später werden wir zu $X = \mathbb{C}$ oder \mathfrak{h} die Untergruppe $\Gamma \subseteq Aut(X)$ betrachten. Auf X werden wir $f : X \xrightarrow{\text{meromorph}} \mathbb{C}$ mit $f(z + \gamma) = f(z) \forall \gamma \in \Gamma$ betrachten.

Beispiel: 3.9 $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = e^{2\pi z}, \quad f(z + n) = f(z)$. Hier ist $\Gamma = \{t_n \mid n \in \mathbb{Z}\} \subseteq Aut(\mathbb{C})$ und $t_n(z) = z + n$.

Solch ein f »induziert« eine Funktion $\underline{f} : \Gamma \backslash X \rightarrow \mathbb{C}$.

Definition 3.11 $\Gamma \backslash X :=$ Menge alle Bahnen (Orbits) von X bzgl. Γ . Sprechweise: X mod Γ

Orbit := Menge der Gestalt: $\Gamma z := \{\gamma(z) \mid \gamma \in \Gamma\}$.

Bemerkung: X ist disjunkte Vereinigung seiner Orbits unter Γ (d.h.

- je 2 Orbits sind disjunkt oder gleich

- jeder Punkt gehört zu einem Orbit)

$$\underline{f}(\Gamma z) := f(z)$$

Ist Γ diskret, so kann man $\Gamma \backslash X$ mit der Struktur einer Riemannschen Fläche versehen.

Beispiel: 3.10 1. $L = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \underset{\text{Gitter}}{\subseteq} \mathbb{C}$ (d.h. $\Im \frac{\omega_1}{\omega_2} \neq 0$)

$$\Gamma := \{t_l \mid l \in L\}, \quad t_l = z + l, \quad \Gamma \subseteq \text{Aut}(C), \quad \Gamma \subseteq \text{Aut}(\mathbb{C})$$

$$\Gamma \backslash \mathbb{C} = \mathbb{C}/L \quad (\text{Menge der } L\text{-Nebenklassen im Sinne der Gruppentheorie})$$

$$(\Gamma z = \{t_l(z) \mid l \in L\} = \{z + l \mid l \in L\})$$

Fundamentalmasche in L = Fundamentalbereich zu $\Gamma := F := \{x\omega_1 + y\omega_2 \mid 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1\}$
(siehe Abb. 3.2) **Bemerkung:** F hängt von ω_1, ω_2 ab. Eigenschaften:

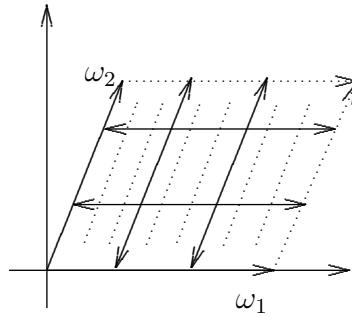


Abbildung 3.2: Die Fundamentalmasche ist das gepunktete Parallelogramm ohne die rechte und obere Seite, Punkte auf der oberen und rechten Seite werden mit gegenüberliegenden Punkten auf der unteren und linken Seite identifiziert (\leadsto Torus).

- zu jedem $z \in \mathbb{C}$ ex. ein $l \in L$ mit $z + l \in F$
- Sind $z_1, z_2 \in F$ und gilt $z_1 = z_2 + l$ für ein $l \in \Gamma$, so gilt: $z_1 = z_2$ und damit $l = 0$

Fazit: $F \longrightarrow \Gamma \backslash \mathbb{C} = \mathbb{C}/L, \quad z \mapsto \Gamma z$ ist bijektiv.

2. $\Gamma = SL(2, \mathbb{Z}) \underset{\text{Untergr.}}{\subseteq} SL(2, \mathbb{R}), \quad SL(2, \mathbb{R})/\{\pm \mathbf{1}\} \approx \text{Aut}(\mathfrak{h}), \quad \pm A \longmapsto (z \mapsto \frac{az+b}{cz+d})$,

wobei $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ist.

$$\Gamma \backslash \mathfrak{h} = \{\Gamma z \mid z \in \mathfrak{h}\}, \quad \Gamma z = \{Az \mid A \in SL(2, \mathbb{Z})\}$$

Definition 3.12 Fundamentalbereich von \mathfrak{h} modulo Γ := Moduldreieck
 $:= \left\{ z \in \mathfrak{h} \mid -\frac{1}{2} \leq \Re z < \frac{1}{2}, |z| > 1, |z| = 1 \Rightarrow \frac{\pi}{2} \leq \text{Arg}(z) \right\} =: F$ (siehe Abb. 3.3)

3 Die Riemannschen Flächen $\overline{\mathbb{C}}, \mathbb{C}$ und h

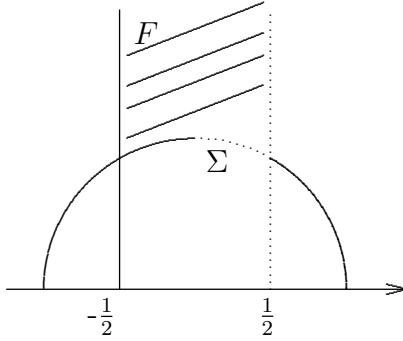


Abbildung 3.3: Das Moduldreieck F ist der Streifen $-\frac{1}{2} \leq \Re z < \frac{1}{2}$, der oberhalb des Kreises liegt. Der gestrichelte Bereich Σ auf dem Kreis gehört nicht zu F .

Eigenschaften:

- a) $z \in \mathfrak{h}$, so ex. ein $A \in SL(2, \mathbb{Z})$, sodass $Az \in F$
- b) Sind $z_1, z_2 \in F$, ist $A \in SL(2, \mathbb{Z})$, mit $Az_1 = z_2$, so ist $z_1 = z_2$

Fazit: $F \rightarrow \Gamma \setminus \mathfrak{h}$ ist bijektiv.

Beweis: (zu (i.)) $z \in \mathfrak{h}$, sei $A \in SL(2, \mathbb{Z})$, sodass $\Im Az$ maximal ist (das geht, da $\left\{ \begin{array}{l} \Im Az \\ \text{Bsp 3.8} \end{array} \right. = \frac{\Im z}{|cz+d|^2} \mid A \in SL(2, \mathbb{Z}), A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right\}$ beschränkt ist)

Sei o.B.d.A. $-\frac{1}{2} \leq \Re Az < \frac{1}{2}$, sonst ersetze Az durch $(Az) + n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} Az$ mit geeignetem $n \in \mathbb{Z}$. Es gilt dann $|Az| \geq 1$, sonst:

$$\Im(SAz) = \frac{\Im(Az)}{|Az|^2} > \Im Az, \quad \text{Widerspruch zur Maximalität von } \Im Az$$

wobei $S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Sw = -\frac{1}{w}$

Also $Az \in F$ oder $Az \in \Sigma$, im zweiten Fall ist $SA \in F$. ■

4 Der Satz von Mittag-Leffler

4.1 Vorbemerkung: Die Mittag-Leffler-Teilbruchzerlegung für rationale Funktionen

$f \in Mer(\overline{\mathbb{C}})$, die Pole in \mathbb{C} seien z_1, \dots, z_p , der Hauptteil in z_j sei $h_j(z) = \frac{a_{-1}^{(j)}}{z-z_j} + \dots + \frac{a_{-n_j}^{(j)}}{(z-z_j)^{n_j}}$, $n_j = \text{ord}_{z_j} f$.

$g := f - (h_1 + \dots + h_p)$ ist holomorph in \mathbb{C} , und g ist bei ∞ entweder holomorph oder hat eine Pol, also ist g ein Polynom. Fazit: $f = g + h_1 + \dots + h_p$ ist die »Partialbruchzerlegung von f «.

Bemerkung:

1. $g(z) - g(0) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n, a_j \in \mathbb{C}$ ist der Hauptteil von f bei ∞
2. ist f holomorph bei ∞ , so ist $g = \text{const}$
3. ist $f = \frac{h_1}{h_2}$, wobei h_1, h_2 Polynome sind, so ist $\text{ord}_\infty f = \deg h_2 - \deg h_1$
4. $f = \frac{h_1}{h_2}$, so $h_1 = q h_2 + r$ mit Polynomen q, r , wobei $\deg r < \deg h_2$ (Euklidische Division), damit ist $f = q + \frac{r}{h_2}$, $\frac{r}{h_2}$ hat Nullstelle bei ∞ , also $\frac{r}{h_2}$ = »Summe der Hauptteile bei den Polen in \mathbb{C} «.

Gibt man Pole z_1, \dots, z_p und Hauptteile h_1, \dots, h_p zu den z_j vor, so gibt es stets ein $f \in Mer(\overline{\mathbb{C}})$ mit genau diesen Hauptteilen.

4.2 Die Mittag-Leffler-Teilbruchzerlegung für meromorphe Funktionen auf \mathbb{C}

Satz 4.1 (Mittag-Leffler) Sei z_1, z_2, \dots eine Folge von komplexen Zahlen mit $|z_j| \rightarrow \infty$, sei $h_j(z) = \frac{a_{-1}^{(j)}}{z-z_j} + \dots + \frac{a_{-n_j}^{(j)}}{(z-z_j)^{n_j}}, a_i^{(j)} \in \mathbb{C}$. Dann gibt es eine auf \mathbb{C} meromorphe Funktion f deren Polstellen genau die z_1, z_2, \dots sind und deren Hauptteile in z_j gerade die h_j sind. Ist \tilde{f} eine weitere meromorphe Funktion auf \mathbb{C} mit den gleichen Polen und Hauptteilen, so ist $f - \tilde{f}$ eine ganze Funktion.

4 Der Satz von Mittag-Leffler

Beweis: Seien o.B.d.A alle $z_j \neq 0$. Betrachte die Taylorentwicklungen von $h_j(z)$ bei $z = 0$:
 $h_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(j)} z^k$ (konvergent für $|z| < |z_j|$).

Bestimme Zahlen P_j , so dass mit $g_j(z) = \sum_{k=0}^{P_j} b_k^{(j)} z^k$ gilt:

$$\forall R > 0 : \sum_{j=1}^{\infty} \max_{|z| \leq R} |h_j(z) - g_j(z)| < \infty$$

Dann gilt: $f(z) := \sum_{j=1}^{\infty} (h_j(z) - g_j(z))$ konvergiert absolut gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \dots\}$ und f ist wie im Satz verlangt.

Zur Bestimmung der P_j : Wähle P_j sodass $\max |h_j(z) - g_j(z)| < \frac{1}{2^j}$ für $|z| \leq \frac{1}{2} |z_j|$, das geht, da $\sum b_k^{(j)} z^k$ absolut gleichmäßig konvergent auf $|z| \leq \frac{1}{2} |z_j|$.

Ist $R > 0$ gegeben, dann ist

$$\sum_{\substack{j \\ \frac{1}{2}|z_j| > R}} \max_{|z| \leq R} |h_j(z) - g_j(z)| \leq \sum_{\substack{j \\ \frac{1}{2}|z_j| > R}} \frac{1}{2} j$$

(man hat nur endlich viele j ausgelassen: $\#\{z_j \mid |z_j| > 2R\} < \infty$) ■

4.3 Beispiele zum Satz von Mittag Leffler

4.3.1 Der Cotangens

$$\pi \cot(\pi z) = \pi \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \frac{d}{dz} \log \sin(\pi z)$$

Pole: $\nu \in \mathbb{Z}$, Hauptteile: $\frac{1}{z-\nu}$, sei $\nu \neq 0$, dann ist die Taylorentwicklung $\frac{1}{z-\nu} = -\frac{1}{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{z}{\nu})^k$

Wahl von P_j : $P_j = 0$, damit $g_j(z) = -\frac{1}{\nu}$ für $|z| < |\nu|$. $\left| \frac{1}{z-\nu} - \frac{1}{\nu} \right| \leq \frac{|z|}{|\nu|(|\nu|-|z|)}$.

Für $R > 0$:

$$\sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z} \\ |\nu| > R}} \max_{|z| \leq R} \left(\frac{1}{z-\nu} + \frac{1}{\nu} \right) \leq \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z} \\ |\nu| > R}} \underbrace{\frac{R}{|\nu|(|\nu|-|R|)}}_{< \text{const.} \frac{1}{|\nu|^2}} < \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z} \\ \nu \neq 0}} \frac{1}{|\nu|^2} < \infty$$

Also $\frac{1}{z} + \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z} \\ \nu \neq 0}} \frac{1}{z-\nu} + \frac{1}{\nu}$ hat die gleichen Pole und Hauptteile wie $\pi \cot(\pi z)$.

Satz 4.2

$$\begin{aligned}\pi \cot(\pi z) &= \frac{1}{z} + \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z} \\ \nu \neq 0}} \frac{1}{z - \nu} + \frac{1}{\nu} \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - \nu} + \frac{1}{\nu} + \frac{1}{z + \nu} - \frac{1}{\nu} \right) \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - \nu^2}\end{aligned}$$

(Beweis: Übung)

Setze $g(z) := z \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\nu^2}\right)$, dann folgt mit obigem Satz:

$$\begin{aligned}\frac{g'}{g}(z) &= \frac{1}{z} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - \nu^2} \stackrel{\text{Satz}}{=} \pi \cot(\pi z) \\ &= \frac{\frac{d}{dz} \sin(\pi z)}{\sin(\pi z)} \\ &\Rightarrow g(z) = \text{const} \cdot \sin(\pi z)\end{aligned}$$

Taylorentwicklung bei $z = 0 \Rightarrow \text{const} = \frac{1}{\pi}$

4.3.2 Die Weierstraßsche \wp -Funktion

Fixiere ein $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$, ($\Im \frac{\omega_1}{\omega_2} \neq 0$)

Gesucht ist eine meromorphe Funktion auf \mathbb{C} mit Polen $\gamma \in \Gamma, \gamma \neq 0$ und Hauptteilen $HT_{\gamma}(z) = \frac{1}{(z-\gamma)^2}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-\gamma)^2} &= \frac{1}{\gamma^2} \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{z}{\gamma}\right)\right)^2} \stackrel{\substack{\text{binom.} \\ \text{Reihe}}}{=} \frac{1}{\gamma^2} \left(1 + 2\frac{z}{\gamma} + 3\left(\frac{z}{\gamma}\right)^2 + \dots\right) \\ P_j &= 0 : \left| \frac{1}{(z-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right| = \frac{|2z\gamma - z^2|}{|\gamma^2(z - \gamma^2)|} \stackrel{\substack{|z| < R \\ |\gamma| > 2R}}{\leq} \frac{R(2|\gamma| + R)}{|\gamma|^2 |\gamma - R|^2} \\ &\leq \frac{3R|\gamma|}{|\gamma|^2 \left(\frac{1}{2}|\gamma|\right)^2} = \frac{12R}{|\gamma|^3}\end{aligned}$$

dann:

$$\sum_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ |\gamma| > 2R}} \max_{|z| \leq R} \left| \frac{1}{|z - \gamma|^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right| \leq \sum_{\gamma \neq 0} \frac{12R}{|\gamma|^3} \stackrel{\text{Lemma 1.1}}{<} \infty$$

4 Der Satz von Mittag-Leffler

Satz 4.3 Durch $\wp(z; \Gamma) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \gamma \neq 0}} \left(\frac{1}{(z-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right)$ wird eine auf \mathbb{C} meromorphe Funktion erklärt. Die Reihe ist absolut gleichmäßig konvergent auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{C} \setminus \Gamma$. Die Pole von \wp sind gerade die Punkte in Γ , Hauptteil bei $\gamma \in \Gamma$ ist $\frac{1}{(z-\gamma)^2}$.

Satz 4.4 $-\frac{d^2}{dz^2} (\log \sigma(z; \Gamma)) = \wp(z; \Gamma)$

Beweis:

$$\begin{aligned}\sigma(z) &= z \prod_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \gamma \neq 0}} \left(1 - \frac{z}{\gamma} \right) e^{\frac{z}{\gamma} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{\gamma} \right)^2} \\ \frac{\sigma'}{\sigma}(z) &= \frac{1}{z} + \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \gamma \neq 0}} \left(\frac{1}{z-\gamma} + \frac{1}{\gamma} + \frac{z}{\gamma^2} \right) \\ \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \right)'(z) &= -\frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \gamma \neq 0}} \left(-\frac{1}{(z-\gamma)^2} + \frac{1}{\gamma^2} \right) = -\wp(z)\end{aligned}$$

■

Satz 4.5 Für ein $\gamma \in \Gamma$ gilt $\wp(z + \gamma; \Gamma) = \wp(z; \Gamma)$.

Beweis:

$$\begin{aligned}\wp'(z) &= -\frac{2}{z^3} + \sum_{\substack{\epsilon \neq 0 \\ \epsilon \in \Gamma}} \frac{2}{(z-\epsilon)^3} = -2 \sum_{\epsilon \in \Gamma} \frac{1}{(z-\epsilon)^3} \\ \wp'(z + \gamma) &= -\frac{2}{z^3} + \sum_{\substack{\epsilon \neq 0 \\ \epsilon \in \Gamma}} \frac{2}{(z-\epsilon+\gamma)^3} = -2 \sum_{\epsilon \in \Gamma} \frac{1}{(z-(\epsilon+\gamma))^3}\end{aligned}$$

denn mit ϵ durchläuft auch $\epsilon - \gamma$ das Gitter Γ . Damit ist $\wp(z + \gamma) = \wp(z) + c(\gamma)$ (*) (wobei $c(\gamma)$ eine Konstante ist, die von γ abhängt).

Zeige $c(\gamma) = 0$: Offensichtlich ist $\wp(-z) = \wp(z)$ (\wp ist eine gerade Funktion). Wähle in (*) $z = -\frac{\gamma}{2}$: $\wp\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \wp\left(-\frac{\gamma}{2}\right) + c(\gamma) \Rightarrow c(\gamma) = 0$

■

5 Elliptische Funktionen

Für das gesamte Kapitel sei:

$$\begin{aligned}\Gamma &= \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2, \Im\frac{\omega_1}{\omega_2} \neq 0 \\ F &:= \{x\omega_1 + y\omega_2 \mid 0 \leq x, y < 1\} \\ F &\xrightarrow{\sim} \mathbb{C}/\Gamma \quad \text{vermöge } z \mapsto z + \Gamma\end{aligned}$$

Definition 5.1

$$Ell(\Gamma) := \{f \in Mer(\mathbb{C}) \mid \forall \gamma \in \Gamma : f(z + \gamma) = f(z)\}$$

heißt **Körper der elliptischen Funktionen** elliptische Funktionen zu Γ .

Konvention: Ist z_0 Pol von f , dann setze $f(z_0) = \infty \in \overline{\mathbb{C}}$.

Satz 5.1 $Ell(\Gamma)$ ist ein Körper.

5.1 Divisoren auf \mathbb{C}/Γ

Lemma 5.1 Sei $f \in Ell(\Gamma)$. Für $z_0 \in \mathbb{C}, \gamma \in \Gamma$ gilt: $\text{ord}_{z_0}(f) = \text{ord}_{z_0+\gamma}(f)$

Beweis: Es gibt eine offene Umgebung U von z_0 und eine auf U holomorphe Funktion g mit $g(z_0) \neq 0$, so dass

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z) \quad \text{für } z \in U, z \neq z_0 \text{ und } n = \text{ord}_{z_0} f \tag{*}$$

Dann gilt aber für $z \in \gamma + U$ ($\gamma + U$ ist offene Umgebung von $z_0 + \gamma$): $f(z) = f(z - \gamma) \stackrel{(*)}{=} (z - (z_0 + \gamma))^n g(z - \gamma)$. Es ist $\tilde{g} : z \mapsto g(z - \gamma)$ holomorph auf $\gamma + U$, $\tilde{g}(z_0 + \gamma) = g(z_0) \neq 0$. Es folgt: $n = \text{ord}_{z_0 + \gamma} f$ ■

Definition 5.2 Ist $f \in Ell(\Gamma)$, so definiere

$$\begin{aligned}D_f : \mathbb{C}/\Gamma &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ D_f(p) &:= \text{ord}_{z_0}(f) \\ p &= z_0 + \Gamma\end{aligned}$$

D_f heißt **Divisor** f . D_f ist nach dem Lemma wohldefiniert.

5 Elliptische Funktionen

Lemma 5.2 $D_f(p) = 0$ für alle $p \in \mathbb{C}/\Gamma$ bis auf endlich viele Ausnahmen.

Beweis: F sei eine Fundamentalmasche für Γ (also $F \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma, z \mapsto z + \Gamma$ ist bijektiv)

$$\#\{p \mid D_f(p) \neq 0\} = \#\{z_0 \in F \mid \text{ord}_{z_0} f \neq 0\}$$

Zu $z_0 \in \bar{F}$ existiert eine offene Umgebung U_{z_0} von z_0 , so dass f auf $U_{z_0} \setminus \{z_0\}$ keine Null- oder Polstellen hat. Da \bar{F} kompakt ist, gibt es $z_1, \dots, z_t \in \bar{F}$, so dass $\bar{F} = \bigcup_{i=1}^t U_{z_i}$. Also ist $\{z_0 \in F \mid \text{ord}_{z_0} f \neq 0\} \subseteq \{z_1, \dots, z_t\}$. ■

Definition 5.3

$$\text{Div}(\mathbb{C}/\Gamma) := \{D : \mathbb{C}/\Gamma \rightarrow \mathbb{Z} \mid D(p) = 0 \text{ für fast alle } p \in \mathbb{C}/\Gamma\}$$

heißt **Divisoren auf \mathbb{C}/Γ** . $\text{Div}(\mathbb{C}/\Gamma)$ ist eine Gruppe bzgl der Addition: $(D_1 + D_2)(p) := D_1(p) + D_2(p)$

$$P(\mathbb{C}/\Gamma) := \{D \mid \exists f \in \text{Ell}(\Gamma) : D = D_f\}$$

heißt die Untergruppe der **Hauptdivisoren**. Dabei steht p für principle divisors.

Untergruppeneigenschaft: $D_{f_1} + D_{f_2} = D_{f_1 \cdot f_2}, D_{f^{-1}} = -D_f$

5.2 Drei der vier Liouvilleschen Sätze

Satz 5.2 (erster Liouvillescher Satz) Die einzig holomorphen Funktionen in $\text{Ell}(\Gamma)$ sind die Konstanten.

Beweis: Ist $f \in \text{Ell}(\Gamma)$ holomorph, dann ist $f(\mathbb{C}) = f(F) = f(\bar{F})$. f ist stetig und \bar{F} ist kompakt $\Rightarrow f(\bar{F})$ ist kompakt. Insbesondere ist $f(\mathbb{C})$ also beschränkt (Heine Borel). Nach Liouville aus Funktionentheorie I ist f konstant. ■

Korollar 5.1 Sind $f_1, f_2 \in \text{Ell}(\Gamma)^*, D_{f_1} = D_{f_2}$, dann ist $f_1 = \text{const} \cdot f_2$

Beweis: $D_{f_1} = D_{f_2} \Rightarrow D_{f_1/f_2} = 0$, also $\frac{f_1}{f_2}$ holomorph, also = const. ■

Satz 5.3 (zweiter Liouvillescher Satz) Sei $f \in \text{Ell}(\Gamma)$, dann gilt

$$\sum_{z_0 \in F} \text{Res}_{z_0} F = 0$$

(Alternative Formulierung: $\sum_{p \in \mathbb{C}/\Gamma} \text{Res}_p f = 0$, $\text{Res}_p f := \text{Res}_{z_0} f$, wobei $p = z_0 + \Gamma$)

Beweis:

$$2\pi i \sum_{z \in F} f = \oint_{\partial F} f(z) dz$$

Abbildung 5.1: ohne Pole auf dem Rand

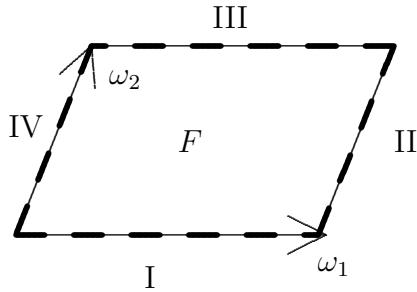
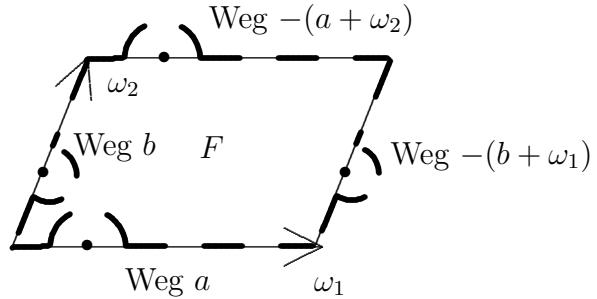


Abbildung 5.2: mit Polen auf dem Rand



Der Rand der Fundamentalmasche F wird auf den gestrichelten Wegen entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen.

f hat keine Pole in ∂F : (siehe auch Abb. 5.1) Dann lässt sich das Integral ohne Probleme berechnen:

$$\oint_{\partial F} f(z) dz = \int_0^1 f(z\omega_1)\omega_1 dt + \int_0^1 f(\omega_1 + t\omega_2)\omega_2 dt \\ + \int_0^1 f(\omega_1 + \omega_2 - t\omega_1)(-\omega_1)dt + \int_0^1 f(\omega_2 - t\omega_2)(-\omega_2)dt \\ \text{I: } t \mapsto t\omega_1 \quad \text{II: } t \mapsto \omega_1 + t\omega_2 \\ \text{III: } t \mapsto \omega_1 + \omega_2 - t\omega_1 \quad \text{IV: } t \mapsto \omega_2 - t\omega_2$$

Da $f \in \text{Ell}(\Gamma)$ (also mit $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \{0, 1\}$ gilt: $\forall z \in \partial F : f(\epsilon_1\omega_1 + \epsilon_2\omega_2 + z) = f(z)$), addieren sich das erste und dritte, sowie das zweite und vierte Integral zu 0. Es folgt

$$\oint_{\partial F} f(z) dz = 0$$

f hat Pole in ∂F : Dann $2\pi i \sum_{z \in F} \text{Res}_z f = \int_{\gamma} f(z) dz$, wobei γ der gestrichelte Weg aus Abbildung 5.2 ist.

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a f(z) dz - \int_{a+\omega_2} f(z) dz - \int_{b+\omega_1} f(z) dz + \int_b f(z) dz$$

Wieder folgt wie oben, da $f \in \text{Ell}(\Gamma)$: das erste und zweite, sowie das dritte und vierte Integral addieren sich zu 0.

■

Korollar 5.2 Ein $f \in \text{Ell}(\Gamma)$ hat mindestens zwei Pole modulo Γ (d.h. in F) mit Vielfachheiten gezählt

5 Elliptische Funktionen

Folgerung: In einem gewissen Sinne ist die einfachste nichttriviale Funktion in $\text{Ell}(\Gamma)$ eine solche, die einen Pol zweiter Ordnung ($\Rightarrow \text{Residuum} = 0$) in $0 (\in F)$ hat. Der Hauptteil in 0 ist dann $\frac{1}{z^2}$. Die Funktion $\wp(z) (= \wp(z, \Gamma))$ ist eine solche Funktion.

Ist f eine weitere solche Funktion, so ist $f - \wp = \text{const}$ nach Liouville I.

Satz 5.4 (dritter Liouvillescher Satz) Ist $f \in \text{Ell}(\Gamma)$, dann ist

$$\sum_{p \in \mathbb{C}/\Gamma} D_f(p) = 0$$

Beweis:

f hat keine Null- oder Polstellen auf ∂F : dann gilt mit dem Satz von Rouché:

$$2\pi i \sum_{z \in F} \text{ord}_f f = \oint_{\partial F} d \log f = \oint_{\partial F} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$$

Das folgt aber, wie im vorigen Beweis, unter Benutzung von $\frac{f'}{f} \in \text{Ell}(\Gamma)$

f hat Null- oder Polstellen auf ∂F : analog wie im vorigen Beweis.

■

Fazit: Wir erhalten eine exakte Sequenz von Gruppen:

$$1 \longrightarrow \mathbb{C}^* \longrightarrow \text{Ell}(\Gamma)^* \longrightarrow \text{Div}_0(\mathbb{C}/\Gamma)$$

Die Sequenz ist hinten **nicht** surjektiv: z.B:

$$D : \mathbb{C}/\Gamma \longrightarrow \mathbb{Z}, D(p) := \begin{cases} -1 & p = 0 \\ +1 & p = \frac{1}{2}\omega_1 + \Gamma \end{cases}$$

Wäre $D = D_f$ so hätte f nur einen Pol im Widerspruch zu Liouville II.

5.3 Thetafunktionen

Erinnerung: $(\log \sigma)'' = -\wp$. Also für $\gamma \in \Gamma$ gilt:

$$\frac{d^2}{dz^2} \log \sigma(z + \gamma) = \frac{d^2}{dz^2} \log \sigma(z)$$

daher (zweimal Stammfunktion suchen, dann exp anwenden)

$$\sigma(z + \gamma) = e^{A(\gamma)z + B(\gamma)} \sigma(z), \quad \forall z$$

mit geeigneten Konstanten $A = A(\gamma), B = B(\gamma)$.

Definition 5.4

$$\Theta(\Gamma) := \left\{ f \text{ meromorph auf } \mathbb{C}, f \neq 0 \mid (\log f)'' = \left(\frac{f'}{f} \right)' \in \text{Ell}(\mathbb{C}/\Gamma) \right\}$$

heißt Menge der **Thetafunktionen mod Γ** .

$$\Theta(\Gamma)_{triv} := \left\{ e^{p(z)} \mid p = \text{Polynom vom Grad } \leq 2 \right\}$$

Bemerkung: $\Theta(\Gamma)_{triv} \subseteq \Theta(\Gamma)$, $\sigma \in \Theta(\Gamma)$, $\sigma(z + \gamma) = e^{A(\gamma)z + B(\gamma)}$.
Damit sind $\gamma \mapsto A(\gamma)$, $\gamma \mapsto B(\gamma)$ jeweils Abbildungen der Form $\Gamma \longrightarrow \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}$.

Bemerkung: Kozykelrelation:

$$\underbrace{\frac{\sigma(z + \gamma_1 + \gamma_2)}{\sigma(z + \gamma_1)}}_{\exp(A(\gamma_2)(z + \gamma_1) + B(\gamma_2))} \cdot \underbrace{\frac{\sigma(z + \gamma_1)}{\sigma(z)}}_{\exp(A(\gamma_1)z + B(\gamma_1))} = \underbrace{\frac{\sigma(z + \gamma_1 + \gamma_2)}{\sigma(z)}}_{\exp(A(\gamma_1 + \gamma_2)z + B(\gamma_1 + \gamma_2))}$$

Daraus folgt: $B(\gamma_1 + \gamma_2) = B(\gamma_1) + B(\gamma_2)$, d.h. $B : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}$ ist ein Gruppenhomomorphismus, $A(\gamma_2)\gamma_1 + A(\gamma_1) = A(\gamma_1 + \gamma_2)$, $A : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}$ ist ein **Kozykel**.

Satz 5.5 1. $\Theta(\Gamma)$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Funktionen

2. Ist $f \in \Theta(\Gamma)$, dann ist $\text{ord}_z f = \text{ord}_{z+\gamma} f, \forall z \in \mathbb{C}, \gamma \in \Gamma$

Beweis: 2. ist eine Übung und folgt durch Nachrechnen.

Zu 1.:

$$(\log f_1 \cdot f_2)'' = (\log f_1)'' + (\log f_2)'' \in \text{Ell}(\Gamma)$$

■

Definition 5.5 Sei $f \in \Theta(\Gamma)$, $D_f : \mathbb{C}/\Gamma \longrightarrow \mathbb{Z}$, $D_f(p) := \text{ord}_{z_0} f$, wobei $p = z_0 + \Gamma$.

Bemerkung:

- $D_f(p) = 0$ für fast alle $p \in \mathbb{C}/\Gamma$
- wohldef. nach Satz 5.5 (1.)
- $D_{f_1 \cdot f_2} = D_{f_1} + D_{f_2}$, d.h. $f \mapsto D_f$ ist Gruppenhomomorphismus $\Theta(\Gamma) \longrightarrow \text{Div}(\mathbb{C}/\Gamma)$
- $f \in \Theta(\Gamma)_{triv} : D_f \equiv 0$

5 Elliptische Funktionen

Satz 5.6 Die Sequenz von Gruppenhomomorphismen

$$1 \longrightarrow \Theta(\Gamma)_{triv} \hookrightarrow \Theta(\Gamma) \longrightarrow \text{Div}(\mathbb{C}/\Gamma) \longrightarrow 1$$

ist exakt.

Beweis: Definiere $D_\sigma := (0)$ d.h.

$$D_\sigma(p) := \begin{cases} 1, & \text{falls } p = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und für $\sigma(* - z_0), z_0 \in \mathbb{C}$ fix:

$$D_{\sigma(* - z_0)}(p) := (z_0 + \Gamma) = \begin{cases} 1, & \text{falls } p = z_0 + \Gamma \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Surjektivität von $f \mapsto D_f$: Sei $D \in \text{Div}(\mathbb{C}/\Gamma)$, seien p_1, \dots, p_n die Punkte in \mathbb{C}/Γ , mit $\nu_j := D(p_j) \neq 0$. Sei $p_j = z_j + \Gamma$ mit geeigneten $z_j \in \Gamma$.
Setze $f(z) := \prod_{j=1}^n \sigma(z - z_j)^{\nu_j}$, dann

$$D_f = \sum_{j=1}^n D_{\sigma(* - z_j)^{\nu_j}} = \sum_{j=1}^n \nu_j D_{\sigma(* - z_j)} = \sum_{j=1}^n \nu_j (z_j + \Gamma) = D$$

Kern($f \mapsto D_f$): $\Theta(\Gamma) \subseteq \text{Kern}(f \mapsto D_f)$: ok. Sei $\theta \in \Theta(\Gamma)$, mit $D_\theta = 0$, dann $\left(\frac{\theta'}{\theta}\right)' = (\log \theta)''$ ist holomorph, Also = const =: a (Liouville I). Also $\frac{\theta'}{\theta} = az + b$, (b geeignet), $\theta = \exp\left(a\frac{z^2}{2} + bz + c\right)$, (c geeignet), d.h. θ ist trivial. ■

Korollar 5.3 $\sigma(z + \gamma) = \exp(Az + b)\sigma(z)$, mit $A = A(\gamma), B = B(\gamma), \gamma \in \Gamma$ fix.

Beweis:

$$\begin{aligned} f(z + \gamma) &= \prod_{j=1}^n \sigma(z + \gamma - z_j)^{\nu_j} = \prod_{j=1}^n \exp((A(z - z_j) + B)\nu_j) \sigma(z - z_j)^{\nu_j} \\ &= \exp\left((Az + B) \sum_{j=1}^n \nu_j - A \sum_{j=1}^n z_j \nu_j\right) \cdot f(z) \\ &= \exp\left((Az + B) \sum_{p \in \mathbb{C}/\Gamma} D(p) - A \sum_{j=1}^n z_j D(z_j + \Gamma)\right) \cdot f(z) \end{aligned}$$

Also $f(z + \gamma) = f(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$, falls $\sum_{p \in \mathbb{C}/\Gamma} D(p) = 0$ und $\sum_{j=1}^n z_j D(z_j + \Gamma) = 0$. ■

Definition 5.6

$$\tilde{P}(\mathbb{C}/\Gamma) := \left\{ D \in \text{Div}_0(\mathbb{C}/\Gamma) \mid \sum_{p \in \mathbb{C}/\Gamma} pD(p) = 0 \right\}$$

(= 0 in der Gruppe \mathbb{C}/Γ .)

Bemerkung: $\tilde{P}(\mathbb{C}/\Gamma) \subseteq \text{Div}_0(\mathbb{C}/\Gamma)$ ist Untergruppe.

Beispiel: 5.1 \wp' hat Pole (3. Ordnung) in Γ , $\wp'(z) = -\wp'(-z)$, \wp' ist ungerade (da \wp gerade ist) mit $\Gamma = \omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}$ folgt:

- $\wp'\left(\frac{-\omega_1}{2}\right) \underset{\text{ungerade}}{=} -\wp'\left(\frac{\omega_1}{2}\right)$. Es gilt aber auch, wegen der Periodizität $\wp'\left(\frac{-\omega_1}{2}\right) = \wp'\left(\frac{-\omega_1}{2} + \omega_1\right) = \wp'\left(\frac{\omega_1}{2}\right) \Rightarrow \wp'\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = 0$ und analog:
- $\wp'\left(\frac{\omega_2}{2}\right) = 0$
- $\wp'\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right) = 0$

$$D_{\wp'} = -3(0) + \left(\frac{\omega_1}{2} + \Gamma\right) + \left(\frac{\omega_2}{2} + \Gamma\right) + \left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2} + \Gamma\right)$$

$\wp'(z) = 0 \iff 2z \in \Gamma \setminus \{0\}$, $\wp'(z = 0)$ in den Punkten aus $\mathbb{C}/\Gamma \setminus \{0\}$ der Ordnung 2, den **primitiven Zweiteilungspunkten** (siehe Abbildung 5.3). Nach dem vorigen Beweis gilt:

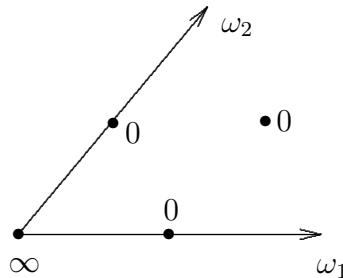


Abbildung 5.3: Die primitiven Zweiteilungspunkte sind die Punkte wo $\wp'(z) = 0$ ist.

$$\wp'(z) = C \cdot \frac{\sigma(z - \frac{\omega_1}{2})\sigma(z - \frac{\omega_2}{2})\sigma(z - \frac{\omega_1+\omega_2}{2})}{\sigma(z)^3}$$

Dabei ist C eine triviale Thetafunktion. Die rechte Seite ist sogar $\in \text{Ell}(\Gamma)$, also $C = \text{const}$ nach Liouville I.

5.4 Bestimmung der Hauptdivisoren

Satz 5.7 (vierter Liouvillescher Satz) Sei $f \in \text{Ell}(\Gamma)$, $f \neq 0$, dann gilt

$$\sum_{p \in \mathbb{C}/\Gamma} p D_f(p) = 0$$

Bemerkung: Es ist also $D_f \in \tilde{P}(\mathbb{C}/\Gamma)$.

Beweis: Fallunterscheidung:

f hat keine Pole oder Nullstellen auf ∂F :

$$\oint_{\partial F} \frac{f'}{f}(z)z dz \underset{\text{Residuensatz}}{=} 2\pi i \sum_{z \in F} \text{Res}_z \left(\frac{f'}{f}(z)z \right)$$

Nebenrechnung: $f = (z - z_j)^n g(z)$, g holomorph nahe z_j , $g(z_j) \neq 0$, d.h. $n = \text{ord}_{z_j} f$.

$$\begin{aligned} \text{Sei } n \neq 0 \quad \frac{f'}{f}(z)z &= \underset{\text{holomorph bei } z_j}{\frac{g'}{g}(z)z} + \frac{n}{z - z_j}z = \frac{g'}{g}(z)z + \frac{nz_j}{z - z_j} + n \\ &\Rightarrow \text{Res}_{z_j} \frac{f'}{f}(z)z = nz_j \end{aligned}$$

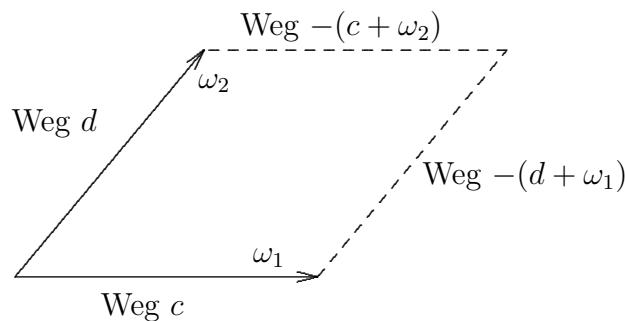


Abbildung 5.4: ∂F wird entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen.

Für die folgenden Integrale betrachte die Wege in Abbildung 5.4:

»Summe der Residuen« = $\sum_{z \in F} \text{ord}_z(f)z =: S$,
Nach der Nebenrechnung bleibt zu zeigen S liegt in Γ . Insgesamt also zu zeigen:

$$I := \oint_{\partial F} \frac{f'}{f}(z)z dz \in 2\pi i \Gamma$$

Man hat:

$$I = \left(\int_c \frac{f'}{f}(z)z dz - \int_{c+\omega_2} \frac{f'}{f}(z)z dz + \int_d \frac{f'}{f}(z)z dz - \int_{d+\omega_1} \frac{f'}{f}(z)z dz \right), \text{ dabei ist}$$

$$\int_{c+\omega_2} \frac{f'}{f}(z)z dz = \int_c \frac{f'}{f}(z + \omega_2)(z + \omega_2) dz, \text{ also}$$

$$\int_c \frac{f'}{f}(z)z dz - \int_{c+\omega_2} \frac{f'}{f}(z)z dz = -\omega_2 \int \frac{f'}{f}(z)z dz \quad (*) \quad \text{und analog}$$

$$\int_d \frac{f'}{f}(z)z dz - \int_{d+\omega_1} \frac{f'}{f}(z)z dz = -\omega_1 \int_d \frac{f'}{f}(z)z dz \quad (**)$$

$$(*) = -\omega_2 \int_{f \circ c} \frac{dw}{w} \quad (\text{Subst.: } w = f(z))$$

$$= -\omega_2 \cdot (\text{Umlaufzahl von } f \circ c \text{ um } 0) \in 2\pi i \mathbb{Z} \cdot \omega_2$$

$$(**) = -\omega_1 \int_{f \circ d} \frac{dw}{w} \quad (\text{Subst.: } w = f(z))$$

$$= -\omega_1 \cdot (\text{Umlaufzahl von } f \circ d \text{ um } 0) \in 2\pi i \mathbb{Z} \cdot \omega_1$$

$f \circ c$ ist ein geschlossener Weg in \mathbb{C}^* , da $f(0) = f(\omega_1)$,
 $f \circ d$ ist ein geschlossener Weg in \mathbb{C}^* , da $f(0) = f(\omega_2)$

Insgesamt folgt: $I \in 2\pi i \Gamma$.

f hat Pole oder Nullstellen auf ∂F : Man ändert den Beweis vom ersten Fall in der gleichen Weise ab, wie beim zweiten Fall des Beweises von Satz 5.3.

■

Satz 5.8 (Hauptsatz der Divisortheorie für elliptische Kurven) Die Sequenz von Gruppenhomomorphismen

$$\mathbf{1} \longrightarrow \mathbb{C}^* \longrightarrow \text{Ell}(\Gamma)^* \xrightarrow[f]{\quad} \tilde{P}(\mathbb{C}/\Gamma) \longrightarrow \mathbf{0}$$

ist exakt.

Beweis: Nach den vorigen Sätzen ist nur noch die Surjektivität zu zeigen: Ist $f \in \text{Ell}(\Gamma)^*$, sind die $z_j, 1 \leq j \leq t$ (die Repräsentanten der p_j mit $D_f(p_j) = 0$), so gewählt, dass

$$\sum D_f(z_j + \Gamma) \cdot z_j = 0, \quad (*)$$

dann gilt $f = \text{const} \cdot \prod_{j=1}^t \sigma(z - z_j)^{D_f(p_j)}$ (im Beweis über die Thetafunktion schon gezeigt: f ist elliptische Funktion, für ein D welches $(*)$ erfüllt) ■

Notation: Ab jetzt $P(\mathbb{C}/\Gamma) := \tilde{P}(\mathbb{C}/\Gamma)$

5 Elliptische Funktionen

Beispiel: 5.2 $D = 3(0) + (\frac{\omega_1}{2} + \Gamma) + (\frac{\omega_2}{2} + \Gamma) + (\frac{\omega_1+\omega_2}{2} + \Gamma)$

$$\sum_{p \in \mathbb{C}/\Gamma} D(p)p = -3 \cdot 0 + \frac{\omega_1}{2} + \Gamma + \frac{\omega_2}{2} + \Gamma + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + \Gamma = 0 \text{ in } \mathbb{C}/\Gamma$$

mit Repräsentanten in \mathbb{C} :

$$-3 \cdot 0 + \frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega_2}{2} - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + \Gamma = 0$$

Übung: Man kann stets $z_j \in p_j$ (Äquivalenzklasse) wählen, so dass
 $\sum_{j=1}^t D(p_j)z_j = 0$ (in \mathbb{C})

Bemerkung: Für eine Gegenüberstellung von \mathbb{C}/Γ und $\overline{\mathbb{C}}$ siehe Tabelle 5.1.

	\mathbb{C}/Γ	$\overline{\mathbb{C}}$
Hauptdivisoren P	$P(\mathbb{C}/\Gamma) \not\subseteq \text{Div}_0(\overline{\mathbb{C}})$	$\text{Div}_0(\overline{\mathbb{C}})$
Greensche Funktion: $g(z)$	$\sigma(z)$	id

D gegeben \rightsquigarrow
 $f := \prod g(z - z_j)^{D(p_j)}$

Tabelle 5.1: Gegenüberstellung von \mathbb{C}/Γ und $\overline{\mathbb{C}}$

Definition 5.7

$$Pic_0(\mathbb{C}/\Gamma) := \text{Div}_0(\mathbb{C}/\Gamma)/P(\mathbb{C}/\Gamma)$$

heißt **Picard Gruppe** von \mathbb{C}/Γ

Satz 5.9

$$Pic_0(\mathbb{C}/\Gamma) \approx \mathbb{C}/\Gamma$$

Beweis: Die Abbildung $\text{Div}_0(\mathbb{C}/\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma$, $D \mapsto \sum_{p \in \mathbb{C}/\Gamma} D(p)p$ ist ein Gruppenhomomorphismus:

- surjektiv: $(p) - (0) \xrightarrow{p \in \mathbb{C}/\Gamma} p$
- Kern = $P(\mathbb{C}/\Gamma)$ (ersten Homomorphiesatz anwenden)

■

Notation: Zu $p \in \mathbb{C}/\Gamma$ definiere: $(p) \in \text{Div}(\mathbb{C}/\Gamma)$ via:

$$(p)(q) = \begin{cases} 1 & p = q \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Ist $D \in \text{Div}_0(\mathbb{C}/\Gamma)$, sind p_1, \dots, p_n die Punkte in \mathbb{C}/Γ mit $D(p_j) =: \nu_j \neq 0$, dann ist

$$D = \nu_1(p_1) + \dots + \nu_n(p_n)$$

5.5 Die algebraische Struktur von $\text{Ell}(\Gamma)$

Definition 5.8 Sei $f \in \text{Ell}(\Gamma), f \neq \text{const}$, dann heißt

$$e_{z_0} := \text{ord}_{z_0}(f - f(z_0))$$

der **Verzweigungsgrad** bei z_0 oder die **Vielfachheit** mit der $f(z_0)$ bei z_0 angenommen wird.

Bemerkung: Es gibt nur endlich viele $z_0 \in F$ mit $e_{z_0}(f) > 1$, (denn $e_{z_0}(f) > 1$, wenn $f'(z_0) = 0$, f' hat aber nur endlich viele Nullstellen als elliptische Funktion).

Satz 5.10 Sei $f \in \text{Ell}(\Gamma), f \neq \text{const}$: $\forall b \in \overline{\mathbb{C}}$ gilt: $\sum_{\substack{f(z)=b \\ z \in F}} e_z(f) = \sum_{\substack{z \in F \\ z \text{ Pol von } f}} \text{ord}_z f$

Beweis:

$$D_{f-b} = \sum_{\substack{z \in F \\ z \text{ Pol von } f}} \text{ord}_z f(z + \Gamma) + \sum_{\substack{z \in F \\ f(z)=b}} e_z(f)(z + \Gamma)$$

und $D_{f-b} \in \text{Div}_0(\mathbb{C}/\Gamma)$ ■

Definition 5.9

$$\deg(f) := - \sum_{\substack{z \in F \\ z \text{ Pol von } f}} \text{ord}_z f$$

heißt **Grad von f** .

Satz 5.11 Seien $f, g \in \text{Ell}(\Gamma)$, $f, g \neq \text{const}$. Dann existiert ein Polynom $P(X) \in \mathbb{C}(g)[X]$ vom Grad $n := \deg(g)$, so dass $P(0) \equiv 0$ (Beweis später)

Bemerkung: $\mathbb{C}(g)$ ist der kleinste Körper in $\text{Ell}(\Gamma)$ ($\subseteq \text{Mer}(\mathbb{C})$), der \mathbb{C} und g enthält $= \{R(g) \mid R \in \mathbb{C}(X)\}$

Satz 5.12 Für $g \in \text{Ell}(\Gamma), g \neq \text{const}$, gilt $\mathbb{C}(g) \approx \mathbb{C}(X) =$ Körper der rationalen Funktionen in X .

Beweis: Andernfalls gäbe es ein Polynom $P \in C[X]$ mit $P(g) = 0$ (andernfalls existiert: $\Phi : C[X] \longrightarrow C(g), h \mapsto h(g)$, ist Φ injektiv, dann folgt der Satz). Also nimmt g nur endlich viele Werte an (Nullstellen von P): Widerspruch! ■

Satz 5.13 $\text{Ell}(\Gamma)$ ist eine quadratische Körpererweiterung von \mathbb{C}/\wp . Genauer: $\text{Ell}(\Gamma) = \mathbb{C}(\wp, \wp')$, der kleinste Körper in $\text{Mer}(\mathbb{C})$, der \wp, \wp' und \mathbb{C} enthält und es gilt

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - 20a\wp - 28b, \quad (*)$$

wobei $a, b \in \mathbb{C}$, genauer: $\wp = \frac{1}{z^2} + az^2 + bz^4 + O(z^6)$.

5 Elliptische Funktionen

Beweis: $\mathbb{C}(\wp, \wp')$ ist quadratische Erweiterung von $\mathbb{C}(\wp)$:

- $\mathbb{C}(\wp, \wp') \not\subseteq \mathbb{C}(\wp)$, denn \wp' ist ungerade und \wp ist gerade
- Es gilt die Differentialgleichung (*):

$$\wp = \frac{1}{z^2} + az^2 + bz^4 + \dots \quad (\wp \text{ ist holomorph bei } 0 \text{ mit}$$

$$\text{Wert: } \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \gamma \neq 0}} \frac{1}{z - \gamma} - \frac{1}{z^2} \Big|_{z=0} = 0 \quad , \quad \wp \text{ ist gerade})$$

$$\wp' = -\frac{2}{z^3} + 2az + 4bz^3 + \dots$$

$$\wp'^2 = \frac{4}{z^6} - \frac{8a}{z^2} - 16b + O(z^2)$$

Summanden von (*):

$$4\wp^3 = \frac{4}{z^6} + \frac{12a}{z^2} + 12b + O(z^2)$$

$$-20a\wp = -20\frac{a}{z^2} + O(z^2)$$

$$-28b = -28b + O(z^2)$$

$\Rightarrow \wp'^2 - (4\wp^3 - 20a\wp - 28b) = O(z^2)$. Das ist aber $\in \text{Ell}(\Gamma)$, ferner holomorph bei 0, also auch in Γ , nach Liouville I konstant und nach der Laurententwicklung = 0.

Klar ist: $\mathbb{C}(\wp, \wp') \subseteq \text{Ell}(\Gamma)$. Umgekehrt: Sei $f \in \text{Ell}(\Gamma), f \neq \text{const}$, wäre $f \notin \mathbb{C}(\wp, \wp')$, so hätte man folgenden Turm von Körpererweiterungen:

$$\begin{array}{ll} \text{Körper:} & \mathbb{C}(\wp) \subseteq \mathbb{C}(\wp, \wp') \subsetneqq \mathbb{C}(\wp, \wp', f) \\ \text{Grad:} & 2 \end{array}$$

d ist endlich nach dem Satz 5.11, also wäre

$$\mathbb{C}(\wp) \underset{2d>2}{\subseteq} \mathbb{C}(\wp, \wp', f)$$

Es gibt aber ein \tilde{f} mit $\mathbb{C}(\wp, \wp', f) = \mathbb{C}(\wp)(\tilde{f})$ (Satz vom primitiven Element), also hat \tilde{f} den Grad $2d > 2$ über $\mathbb{C}(\wp)$ im Widerspruch zu Satz 5.11. ■

Beweis: (von 5.11) Es sei $w \in \overline{\mathbb{C}}$,

$$w \mapsto Q_w := \prod_{\substack{z \in \mathbb{C} \\ g(z)=w}} (X - f(z))^{e_z(g)}$$

(Schon gezeigt: $\sum_{g(z)=w} e_z(g) = n$.) Es gilt: die Koeffizienten sind meromorph in w (Übungsaufgabe). Also $Q_* \in \text{Mer}(\overline{\mathbb{C}})[X]$,

$$\mathbb{C} \ni z_0 \mapsto Q_f(z_0), P := Q_{g(w)} \in \mathbb{C}(g)[X]$$

- $\deg P$ (als Polynom) = n
- $P(f)(z_0) = Q_{g(z_0)}(f(z_0)) = \prod_{\substack{z \in \mathbb{C} \\ g(z)=g(z_0)}} (f(z_0) - f(z))^{e_z(g)} = 0$ (z_0 kommt unter den z über die das Produkt läuft vor, somit ist ein Faktor des Produktes = 0)

■

5.6 \mathbb{C}/Γ als algebraische Struktur

5.6.1 Projektive Räume

Definition 5.10

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) := (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \mathbb{C}^*$$

= »Menge aller Untervektorräume der Dimension 1 in \mathbb{C}^{n+1} ohne $\vec{0}$ «. D.h. die Menge der Äquivalenzklassen von Vektoren $\neq \vec{0}$ in \mathbb{C}^{n+1} , wobei die Äquivalenzrelation erklärt ist durch: $\vec{x} \sim \vec{y} \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}^* : \vec{x} = \lambda \vec{y}$ (die Gerade durch \vec{x} und $\vec{0}$, ohne $\vec{0}$ selbst). $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ heißt der **n -dimensionale projektive Raum über \mathbb{C}** .

Definition 5.11

$$\begin{aligned} [x_0 : x_1 : \dots : x_n] &:= \left\{ \lambda(x_0, x_1, \dots, x_n) \mid \lambda \in \mathbb{C}^*, (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \right\} \\ &= \mathbb{C}^*(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \end{aligned}$$

heißen **homogene Koordinaten** des Vektors (x_0, x_1, \dots, x_n) .

Bemerkung:

- $[x_0 : x_1 : \dots : x_n] = [\frac{x_0}{x_1} : 1 : \dots : \frac{x_n}{x_1}]$ etwa falls $x_1 \neq 0$ (ein x_i ist immer $\neq 0$, da der Nullvektor ausgeschlossen wurde)
- $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, $(x_0, \dots, x_n) \mapsto [x_0 : \dots : x_{n-1} : 1]$ ist injektiv
- die Punkte der Gestalt $[x_0 : \dots : x_{n-1} : 0]$ heißen **unendlich ferne Punkte**
- Man kann die gleiche Konstruktion mit \mathbb{R} statt \mathbb{C} machen: für $n = 2$ hat man die **projektive Ebene über \mathbb{R}** . Vorstellung: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, $(x, y) \mapsto [x : y : 1]$ injektiv, die unendlich fernen Punkte sind $[x : y : 0]$

Beispiel: 5.3 (»Eine Gleichung projektiv machen«)

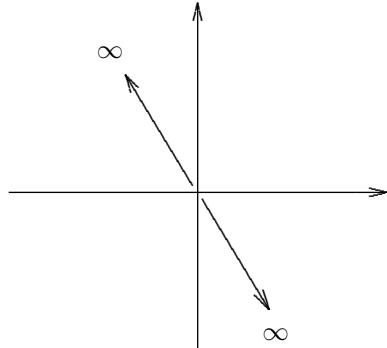
$$K := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{C}^2 \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \quad (\text{bei reellen Punkten: Einheitskreis})$$

$$(x, y) \mapsto [x : y : 1], \quad \text{Bild} = \{[x : y : z] \mid z \neq 0\} = \left\{ \left[\frac{x}{z} : \frac{y}{z} : 1 \right] \mid z \neq 0 \right\}$$

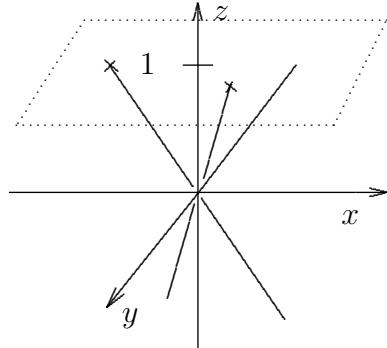
Eigentlich sollte $(\frac{x}{z})^2 + (\frac{y}{z})^2 = 1$, d.h. $x^2 + y^2 = z^2$ gelten.

5 Elliptische Funktionen

Abbildung 5.5: Die projektive Ebene über \mathbb{R}



a) Die beiden Punkte bei Unendlich werden identifiziert ($\lambda = -1$).



b) \mathbb{R}^2 wird auf die Ebene durch $z = 1$ abgebildet, die unendlich fernen Punkte liegen in der Ebene mit $z = 0$.

Definition 5.12 $\overline{K} = \text{Projektiver Abschluß von } K$. $\overline{K} := \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid x^2 + y^2 = z^2\}$

$$\overline{K} = \begin{matrix} K \\ z \neq 0 \end{matrix} \cup \{[1 : i : 0], [1 : -i : 0]\} \quad \begin{matrix} \\ z=0, \text{ siehe Nebenrechnung} \end{matrix}$$

Nebenrechnung: $z = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0$, $[x : y : 0]$, aber es sind x, y nicht beide ebenfalls gleich 0 (da der Nullvektor von Anfang an ausgenommen wurde).

Sei $x \neq 0$: also $1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0$.

Beispiel: 5.4 Es gibt eine Bijektion zwischen $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ und $\overline{\mathbb{C}}$:

$$g : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}, [x : y] \longmapsto \begin{cases} \frac{x}{y} & y \neq 0 \\ \infty & y = 0 \end{cases}$$

Insbesondere ist $\infty \approx [1 : 0]$ und $z \approx [z : 1]$.

Erinnerung: $\mathbb{C}/\Gamma \ni z \longmapsto (\wp(z), \wp'(z)) \subseteq \{(x, y) \mid y^2 = 4x^3 - 20ax - 28b\}$. Mit $A := -20a, B := -28b$ wird daraus

$$\{(x, y) \mid y^2 = 4x^3 + Ax + B\}$$

Definition 5.13 Definiere $E (= E_\Gamma) := \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid zy^2 = 4x^3 + Axz^2 + Bz^3\}$

Bemerkung: $E = \{[x : y : 1] \mid y^2 = 4x^3 + Ax + B\} \cup \{[0 : 1 : 0]\}$

Bezeichnung: Für $p \in \mathbb{C}/\Gamma$, $f \in \text{Ell}(\Gamma)$, setze $f(p) = f(z)$, wobei $z \in p$ (d.h. $p = z + \Gamma$).

Satz 5.14 Die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{C}/\Gamma \longrightarrow E, \quad p \longmapsto \begin{cases} [\wp(p) : \wp'(p) : 1] & p \neq 0 \\ [0 : 1 : 0] & p = 0 \end{cases}$$

ist wohldefiniert und bijektiv. (Die Abbildung ist sogar ein Homöomorphismus, falls man \mathbb{C}/Γ mit der Quotiententopologie und E mit der Spurtopologie der Quotiententopologie auf dem $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ versieht.)

Bemerkung: Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$: dann ist $[\wp(z), \wp'(z) : 1] \stackrel{\wp'(z) \neq 0}{=} \left[\frac{\wp(z)}{\wp'(z)} : 1 : \frac{1}{\wp'(z)} \right]$, bei $z = 0 : [0 : 1 : 0]$

Beweis:

injektiv: Sei $\Phi(p) = \Phi(q)$, sei $z \in p, w \in q$. O.B.d.A. $p, q \neq 0$, also $[\wp(z) : \wp'(z) : 1] = [\wp(w) : \wp'(w) : 1]$, d.h. $\wp(z) = \wp(w), \wp'(z) = \wp'(w)$. Es gilt $(\wp(z) = \wp(w), \deg \wp = 2, \wp \text{ ist gerade, jeder Wert wird von } \wp \text{ 2-mal angenommen}) \Rightarrow z \equiv \pm w \pmod{\Gamma}$.

Sei $z \equiv -w \pmod{\Gamma}$, dann folgt $\wp'(z) = \wp'(-w) \stackrel{\wp' \text{ ungerade}}{=} -\wp'(w) = -\wp'(z)$. Es folgt entweder $\wp'(z) \neq 0$, dann ist $z \equiv w \pmod{\Gamma}$, d.h. $p = q$, oder $\wp'(z) = 0$, dann ist $z \equiv \frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2} \text{ oder } \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$.

surjektiv: Sei $[x : y : z] \in E$: o.B.d.A. sei $z = 1$ ($z = 0 : [x : y : z] = \Phi(0)$). Es gilt also $y^2 = 4x^3 + Ax + B$. Es gibt ein $z \in \mathbb{C}/\Gamma$ mit $x = \wp(z)$ (nach einem früheren Satz). Dann ist

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 + A\wp(z) + B = 4x^3 + Ax + B = y^2$$

Also ist $\wp'(z) = \pm y$.

Ist $\wp'(z) = +y$: ok; andernfalls betrachte $-z$ statt z , dann gilt $x = \wp(-z), y = \wp'(-z) \stackrel{\text{gerade}}{=} \wp'(z) \stackrel{\text{ungerade}}{=}$ ■

Bemerkung:

- es wurde schon gezeigt:

$$\wp'(z) = \frac{\sigma(z - \frac{\omega_1}{2})\sigma(z - \frac{\omega_2}{2})\sigma(z + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2})}{\sigma(z)^3}$$

- ferner:

$$\wp(z) - \wp(w) = \frac{\sigma(z - w)\sigma(z + w)}{\sigma(z)^3}$$

es gibt 2 Pole und 2 Nullstellen:

$$D_{\wp(*) - \wp(w)} = -2(0) + (w + \Gamma)(w - \Gamma)$$

Damit: $\Phi : z + \Gamma \mapsto [\wp(z) : \wp'(z) : 1] \quad \text{für } z \notin \Gamma$

$$\begin{aligned} &= [\sigma(z - w)\sigma(z + w)\sigma(z) : \sigma(z - \frac{\omega_1}{2})\sigma(z - \frac{\omega_2}{2})\sigma(z + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}) : \sigma(z)^3] \\ &\quad (\text{dabei gilt für } w: \wp(w) = 0) \end{aligned}$$

5 Elliptische Funktionen

für $z \in \Gamma$ macht dies auch Sinn, dann gilt:

$$[0 : \underbrace{\sigma\left(-\frac{\omega_1}{2}\right)\sigma\left(-\frac{\omega_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)}_{\neq 0} : 0] = [0 : 1 : 0]$$

Definition 5.14 Eine Teilmenge der Gestalt

$$G_{(\alpha, \beta, \gamma)} := \{[x : y : z] \mid \alpha x + \beta y + \gamma z = 0, (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} \text{ geeignet}\}$$

heißt **Gerade** in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$

Bemerkung: $G_{(\alpha, \beta, \gamma)} = G_{(\alpha', \beta', \gamma')} \iff (\alpha, \beta, \gamma) = c(\alpha', \beta', \gamma')$, für ein $c \in \mathbb{C}^*$. Also hängt $G_{(\alpha, \beta, \gamma)}$ von der Klasse von (α, β, γ) in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ab.

Dualitätsprinzip:

Z.B.: Je zwei verschiedene Geraden bestimmen genau einen Punkt.

Je zwei verschiedene Punkte bestimmen genau eine Gerade.

Satz 5.15 Sei $g \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ eine Gerade, dann schneiden sich g und E_Γ in genau 3 Punkten (mit Vielfachheiten gezählt).

Beweis: Sei F homogenes Polynom (d.h. alle Monome haben den gleichen Grad) vom Grad d in 3 Variablen x, y, z . Sei $g := \{[x : y : z] \mid \alpha x + \beta y + \gamma z = 0\}, [\alpha : \beta : \gamma] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Gesucht sind Lösungen von

$$(*) \quad \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \end{cases}$$

Wähle $T \in GL(3, \mathbb{C})$ mit

$$(\alpha, \beta, \gamma)T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z$$

D.h. $(\alpha, \beta, \gamma)T = (0, 0, 1)$, wähle $T = (s_1, s_2, s_3)$ mit $(\alpha, \beta, \gamma)s_i = 0$ für $i = 1, 2$ (s_1, s_2 sind dann orthogonales Komplement zu (α, β, γ) , insbesondere seien s_1, s_2 linear unabhängig) und $(\alpha, \beta, \gamma)s_3 = 1$.

Wir suchen daher Lösungen des Transformierten Gleichungssystems

$$(**) \quad \begin{cases} \tilde{F}(x, y, z) := F(T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = 0 \\ (\alpha, \beta, \gamma)T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z = 0 \end{cases}$$

(Zwischen den Lösungen von (*) und (**) besteht eine 1 : 1 Beziehung via

$$[x : y : z] \longmapsto [x' : y' : z'], \text{ wobei } \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Lösungen von (**) sind alle $[x : y : 0]$ mit

$$(***) \quad G(x, y) := \tilde{F}(x, y, 0) = 0$$

G ist homogenes Polynom vom Grad d .)

Es gibt Zahlen $a_j, b_j \in \mathbb{C}, j = 1, \dots, d$, so dass $G(x, y) = \prod_{j=1}^d (b_j x - a_j y)$.

$$(G(x, y) = y^d G(\frac{x}{y}, 1), \text{ denn } G = \sum * x^k y^{d-k} \text{ und } y^d G(\frac{x}{y}, 1) = y^d \sum * \left(\frac{x}{y}\right)^k \\ = y^d \text{const} \prod_{j=1}^d \left(\frac{x}{y} - \rho_j\right) (\rho_j \text{ seien Nullstellen von } G(u, 1) \in \mathbb{C}[u]))$$

Lösungen von (***): $[a_j : b_j : 0], j = 1, \dots, d$

Bemerkung: $\{[x : y : z] \mid F(x, y, z) = 0\}$ heißt »Kurve vom Grad d in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ «. Man kann zeigen: Die Anzahl der Schnittpunkte zweier Kurven vom Grad d und e (mit Vielfachheiten gezählt) ist gleich $e \cdot d$.

Vorbemerkung: Sei $p \in \mathbb{C}/\Gamma: \Phi(-p) = [\wp(-p) : \wp'(-p) : 1] = [\wp(p) : -\wp'(p) : 1]$, wegen $z = 1 \Rightarrow E = \{y^2 = 4x^3 + Ax + B\}$ und y^2 symmetrisch zur x -Achse.

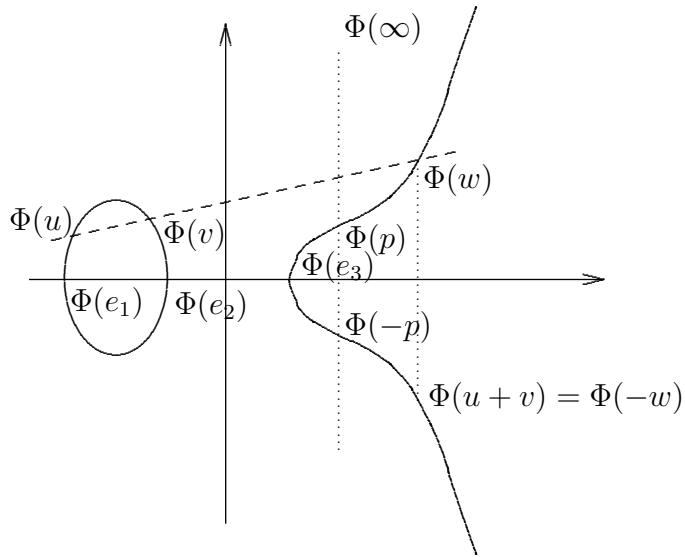


Abbildung 5.6: Addition auf elliptischen Kurven

Für die Punkte $\Phi(e_1), \Phi(e_2), \Phi(e_3)$ auf der x-Achse gilt:

$$\{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \frac{\omega_1}{2} + \Gamma, \frac{\omega_2}{2} + \Gamma, \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + \Gamma \right\}$$

5 Elliptische Funktionen

Satz 5.16 Seien $u, v, w \in \mathbb{C}/\Gamma$, $u + v + w = 0$, dann sind $\Phi(u), \Phi(v), \Phi(w) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ kolinear (d.h. sie liegen auf einer und derselben Geraden in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$) (siehe Abbildung 5.6).

Beweis: Seien o.B.d.A. $u, v, w \neq 0$ sonst ist die Aussage klar, denn etwa für $w = 0$ gilt $v = -u$ und dann liegen $\Phi(-u)$ und $\Phi(0)$ auf der Geraden $\{[x : y : z] \mid x - \wp(u) = 0\}$.

Fall: $u \neq v$ (der Fall $u = v$ zur Übung):

Sei $[\alpha : \beta : \gamma]$ die Koordinate der Geraden durch $\Phi(u)$ und $\Phi(v)$

(Schreibe $\Phi(u) = [x : y : z]$, $\Phi(v) = [x' : y' : z']$, wegen $u \neq v$ und Φ injektiv gilt: $\Phi(u) \neq \Phi(v)$, daher sind $(x, y, z), (x', y', z')$ linear unabhängig. Also existiert genau ein (α, β, γ) (bis auf Multiplikation mit einer Konstanten) mit:

$$\begin{bmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0$$

)

Betrachte $f = \alpha\wp + \beta\wp' + \gamma \in \text{Ell}(\Gamma)$. Wir nehmen $\beta \neq 0$ an: dann ist $D_f = -3(0) + (u) + (v) + (w)$. Nach Wahl von θ, β, γ gilt:

$$(\alpha, \beta) \begin{pmatrix} \wp(\xi) \\ \wp'(\xi) \end{pmatrix} \quad \text{für } \xi = u, v$$

Also $\Phi(w) = [\wp(u) : \wp'(u) : 1] \in \text{»der durch } [\alpha : \beta : \gamma] \text{ bestimmten Geraden«}$ ■

Bemerkung:

- Sind $u, w \in \mathbb{C}/\Gamma$, $u + u + w = 2u + w = 0$, dann liegen $\Phi(u), \Phi(w)$ auf der Tangenten an die Kurve E_Γ in $\Phi(u)$.
- Der Punkt $[0 : 1 : 0]$ ist ein Dreifachpunkt von E_Γ

(Tangente: Sei die Kurve in \mathbb{C}^2 gegeben durch $F(X, Y) = 0$, $F \in \mathbb{C}[X, Y]$, $F(X_0, Y_0) = 0$, dann ist die Tangente an X_0, Y_0 gegeben durch

$$F_x(X_0, Y_0)(X - X_0) + F_y(X_0, Y_0)(Y - Y_0) = 0$$

)

Satz 5.17 (Additionstheorem) Seien $u, v, w \in \mathbb{C}/\Gamma$ paarweise verschieden und $u + v + w = 0$, dann gilt

$$\begin{aligned} \wp(u) + \wp(v) + \underbrace{\wp(w)}_{\begin{aligned} = -\wp(u+v) \\ = \wp(u+v) \end{aligned}} &= \frac{1}{4} \left(\frac{\wp'(v) - \wp'(u)}{\wp(v) - \wp(u)} \right)^2 \end{aligned}$$

(Also $\wp(u + v) = \text{algebraischer Ausdruck in } \wp(u), \wp(v), \wp'(u), \wp'(v)$.)

Beweis: Seien $\bar{u} = u + \Gamma, \bar{v} = v + \Gamma, \bar{w} = w + \Gamma$ die Restklassen. $\Phi(\bar{u}), \Phi(\bar{v}), \Phi(\bar{w})$ liegen auf einer Geraden durch $\Phi(\bar{u}), \Phi(\bar{v})$:

$$y = \underbrace{\frac{\varphi'(v) - \varphi'(u)}{\varphi(v) - \varphi(u)}}_{=:m} (x - \varphi(u)) + \varphi'(u)$$

Dann hat $y^2 - (4x^3 + Ax + B) =$

$$(m(x - \varphi(u)) + \varphi'(u))^2 - (4x^3 + Ax + B) = 0 \quad (*)$$

drei Nullstellen $\varphi(\bar{u}), \varphi(\bar{v}), \varphi(\bar{w})$, man kann $(*)$ also schreiben als

$$(x - \varphi(\bar{u}))(x - \varphi(\bar{v}))(x - \varphi(\bar{w})) = 0 \quad (**)$$

Durch Vergleich der Koeffizienten von x^2 in $(*)$ und $(**)$ findet man:

$$\varphi(\bar{u}) + \varphi(\bar{v}) + \varphi(\bar{w}) = \underbrace{\frac{1}{4}m^2}_{\text{aus } (*)} \quad \underbrace{\varphi(\bar{u}) + \varphi(\bar{v}) + \varphi(\bar{w})}_{\text{aus } (**)} = 0$$

■

Bemerkung: $u, v, w \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ paarweise verschieden $u + v + w = 0$, dann gilt

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \varphi(u) & \varphi(v) & \varphi(w) \\ \varphi'(u) & \varphi'(v) & \varphi'(w) \end{vmatrix} = 0,$$

da $\Phi(u) = [\varphi(u) : \varphi'(u) : 1], \Phi(v) = [\varphi(v) : \varphi'(v) : 1], \Phi(w) = [\varphi(w) : \varphi'(w) : 1]$ auf einer Geraden liegen, deswegen sind die Vektoren linear abhängig und die Determinante ist 0.

Diskriminante eines Polynoms

Für ein quadratisches Polynom $f(x) = x^2 + px + q$ ist die Diskriminante $\Delta := p^2 - 4q$. Sind δ_1, δ_2 Nullstellen von f so gilt auch $f(x) = (x - \delta_1)(x - \delta_2)$, dann lässt sich Δ schreiben als: $(\delta_1 + \delta_2)^2, \delta_{1,2} = -\frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$.

Für ein kubisches Polynom $f(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)$, bzw. $f(x) = x^3 + cx^2 + ax + b$ ist $\Delta := \prod_{i < j} (a_i - a_j)^2$. Nach einem Satz gilt für $c = 0$: $\Delta = -(4a^3 + 27b^2)$.

Δ misst den Abstand der verschiedenen Nullstellen, sind zwei Nullstellen gleich, so ist $\Delta = 0$.

Erinnerung: $\varphi'^2 = 4\varphi^3 + A\varphi + B$

Satz 5.18 Die Diskriminante von $x^3 + \frac{A}{4}x + \frac{B}{4}$ ($\Delta = -\frac{1}{16}(A^3 + 27B^2)$) ist $\neq 0$.

Beweis: Zu zeigen: die Nullstellen von $x^3 + Ax + B$ sind paarweise verschieden, Nullstellen sind $\varphi(u)$ mit $\varphi'(u) = 0$, d.h. $\varphi(\frac{\omega_1}{2}), \varphi(\frac{\omega_2}{2}), \varphi(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2})$, (also $\varphi(p)$ wobei $p \in \mathbb{C}/\Gamma, p \neq 0, 2p = 0$). Diese sind paarweise verschieden, sonst folgt: $\varphi(z) = \varphi(z') \iff z \equiv z' \pmod{\Gamma}$. ■

Bemerkung:

- $\wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right) + \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right) + \wp\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right) = 0$
- $\Delta = \prod_{i < j} (e_i - e_j)^2$, wo $e_1 = \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right)$, $e_2 = \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right)$, $e_3 = \wp\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)$
- $\Delta \neq 0$ ist äquivalent dazu, dass die Kurve E_Γ keine singulären Punkte (im Sinne der algebraischen Geometrie) besitzt.

5.7 \mathbb{C}/Γ als Riemannsche Fläche

Definition 5.15 (allgemeine Riemannsche Fläche) X heißt **Riemannsche Fläche**, falls gilt:

1. X ist zusammenhängender topologischer Raum
2. Es existiert eine Familie von Karten $\mathcal{A} := \{(t_i, U_i)\}_{i \in I}$ (Karte: $U \subseteq X$ offen, $t_i : U \xrightarrow{\text{homöomorph}} \text{offene Teilmengen von } \mathbb{C}$), so dass
 - a) $X = \bigcup_{i \in I} U_i$
 - b) Ist $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, so ist $t_i \circ t_j^{-1} : t_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow t_i(U_i \cap U_j)$

Beispiel: 5.5 Beispiele für Riemannsche Flächen:

- $U \subseteq \mathbb{C}$ offen ist Riemannsche Fläche, $X = U$, $\mathcal{A} = \{(id, U)\}$
- $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$,

$$\begin{aligned} t_0 : \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\} &= \mathbb{C} \xrightarrow{id} \mathbb{C} \\ t_\infty : \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{1}{z} \end{aligned}$$

- $X : \mathbb{C}/\Gamma$ ist topologischer Raum, via »Quotiententopologie« (d.h. $U \subseteq \mathbb{C}/\Gamma$ heißt offen $\iff \Pi^{-1}(U)$ ist offen, dabei ist Π die kanonische Projektion $\Pi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}/\Gamma$, $z \mapsto z + \Gamma$).

Sei $d := \min \{|\omega| \mid \omega \in \Gamma, \omega \neq 0\}$, $\mathcal{A} := \{(t_{z_0}, U_{z_0})\}$, $z_0 \in \mathbb{C}$, wobei $t_{z_0} = \Pi_{z_0}^{-1}$ ist, mit

$$\Pi_{z_0} : \underbrace{\left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \frac{d}{2} \right\}}_{V_{z_0}} \longrightarrow \underbrace{\Pi(V_{z_0})}_{U_{z_0}}$$

$\Pi(V_{z_0})$ ist offen, Π ist surjektiv, ebenfalls injektiv, da d entsprechend gewählt wurde (siehe Abbildung 5.7).)

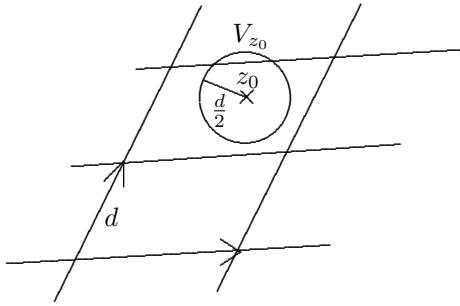


Abbildung 5.7: Quotienten Topologie

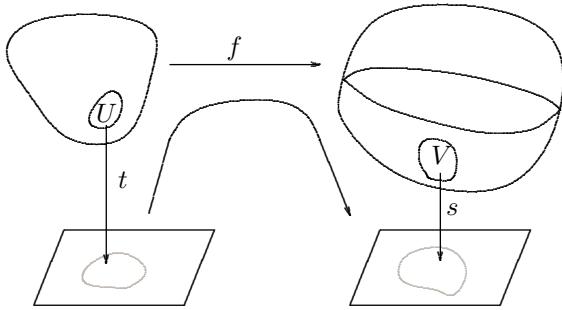


Abbildung 5.8: Holomorphiebegriff auf Riemannschen Flächen

- \mathbb{C}/Γ ist kompakte Riemannsche Fläche, da: $\mathbb{C}/\Gamma = \Pi(\bar{F})$, \bar{F} kompakt ist und Π stetig ist.

Definition 5.16 Seien X, Y Riemannsche Flächen und $f : X \rightarrow Y$ sei stetig.

- (siehe 5.8) f heißt **holomorph**, falls für alle Karten (s, V) von Y und (t, U) von X gilt:

$$s \circ f \circ t^{-1} \quad (\text{jeweils eingeschränkt auf die Definitionsbereiche})$$

ist holomorph.

- X, Y heißen **isomorph** (bzw. **biholomorph äquivalent**), falls eine **biholomorphe** Abbildung $f : X \rightarrow Y$ existiert (d.h. eine holomorphe und bijektive Abbildung $X \rightarrow Y$, deren Umkehrung auch holomorph ist).
- $Mer(X) := \{f : X \rightarrow \overline{\mathbb{C}} \mid f \text{ holomorph}\}$

Bemerkung: $Mer(X)$ ist ein Körper

Satz 5.19 Eine Abbildung $f : \mathbb{C}/\Gamma \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ ist holomorph, genau dann wenn $f \circ \Pi : \mathbb{C} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ holomorph ist. Insbesondere definiert die Abbildung $f \mapsto f \circ \Pi$ einen Körperisomorphismus $Mer(\mathbb{C}/\Gamma) \xrightarrow{\sim} Ell(\Gamma)$ (siehe Abbildung 5.9).

(Der Beweis lässt sich aus den Definitionen folgern.)

Satz 5.20 Seien $\Gamma, \Delta \subseteq \mathbb{C}$ Gitter. Dann sind \mathbb{C}/Γ und \mathbb{C}/Δ biholomorph äquivalent, falls $\Delta = \mu\Gamma$ mit geeignetem $\mu \in \mathbb{C}^*$

Beweis:

\Rightarrow : etwas tieferliegend, deswegen hier nicht gezeigt

5 Elliptische Funktionen

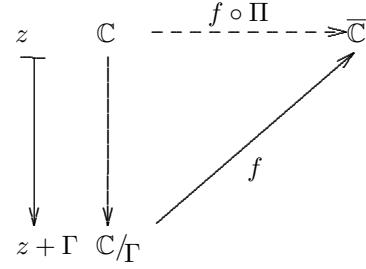


Abbildung 5.9: $f \mapsto f \circ \Pi$ ist ein Körperisomorphismus

$\Leftarrow:$ $\alpha : \mathbb{C}/\Gamma \longrightarrow \mathbb{C}/\Delta, z + \Gamma \longmapsto \mu(z + \Gamma) = \mu z + \Delta$ ist wohldefiniert und biholomorph. ■

Satz 5.21 $\text{Ell}(\Gamma)$ und $\text{Ell}(\Delta)$ sind isomorph als Körper, genau dann wenn $\Delta = \mu\Gamma$ mit geeigneten $\mu \in \mathbb{C}^*$

Beweis:

$\Rightarrow:$ wie eben zu tiefliegend, um es hier zu beweisen

$\Leftarrow:$ $\alpha^* : \text{Ell}(\Delta) \longrightarrow \text{Ell}(\Gamma), f \longmapsto f \circ \alpha$ ist ein Isomorphismus von Körpern ■

5.8 Variation der Gitters

Definition 5.17 Die Gitter $\Gamma, \Delta \subseteq \mathbb{C}$ heißen **ähnlich** (in Zeichen $\Delta \sim \Gamma$), falls $\Delta = \mu\Gamma$ mit geeignetem $\mu \in \mathbb{C}^*$

Bemerkung: \sim ist eine Äquivalenzrelation

Satz 5.22 Für $\tau \in \mathfrak{h} (= \{\tau \in \mathbb{C} \mid \Im \tau > 0\})$ sei

$$L_\tau := \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z} \cdot 1$$

Die Abbildung

$$\mathcal{L} : \mathfrak{h} \longrightarrow \{\Gamma \mid \Gamma \subseteq \mathbb{C}, \Gamma \text{Gitter}\} / \sim, \tau \longmapsto \{\mu L_\tau \mid \mu \in \mathbb{C}^*\}$$

ist surjektiv.

Es gilt $\mathcal{L}(\tau) = \mathcal{L}(\tau')$, genau dann wenn es ein $A \in SL(2, \mathbb{Z})$ gibt mit

$$\tau' = A\tau \quad \left(= \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right)$$

Insbesondere induziert \mathcal{L} eine Bijektion

$$SL(2, \mathbb{Z}) \setminus \mathfrak{h} \xrightarrow{\sim} \text{Gitter in } \mathbb{C}/\sim_{\text{Orbits}}$$

Bemerkung: Man kann zeigen:

- Jede kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht 0 ist isomorph zu $\overline{\mathbb{C}}$
- Jede kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht 1 ist isomorph zu einem \mathbb{C}/Γ (schwierig). Daher definiert die Abbildung $\tau \mapsto \text{Äquivalenzklassen von } \mathbb{C}/\mathcal{L}(\tau)$ eine Bijektion

$$SL(2, \mathbb{Z}) \setminus \mathfrak{h} \xrightarrow{\sim} (\text{kompakte Riemannsche Flächen vom Geschlecht 1})/\text{Biholomorphie}$$

Beweis: \mathcal{L} ist surjektiv: Sei $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$. Dann ist $\Gamma \sim \mathbb{Z}\frac{\omega_1}{\omega_2} + \mathbb{Z} \cdot 1 (= \frac{1}{\omega_2}\Gamma) = \mathbb{Z}(-\frac{\omega_1}{\omega_2}) + \mathbb{Z} \cdot 1$, aber $\Im(\frac{\omega_1}{\omega_2})$ oder $\Im(-\frac{\omega_1}{\omega_2}) > 0$, d.h. $\Gamma \sim L_{\frac{\omega_1}{\omega_2}}$ bzw. $\Gamma \sim L_{-\frac{\omega_1}{\omega_2}}$.

Sei $\mathcal{L}_\Gamma \sim \mathcal{L}_{\Gamma'}$, d.h. $\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z} = \mu(\mathbb{Z}\tau' + \mathbb{Z})$, $\mu \in \mathbb{C}^*$. Es folgt

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu\tau' \\ \mu \end{pmatrix}, \quad \text{mit } \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \text{ oder } \in -\mathbf{1}_2 SL(2, \mathbb{Z})$$

Es folgt $\tau' = \frac{\mu\tau'}{\mu} = \frac{a\tau+b}{c\tau+d} = A\tau$, wegen $\Im\tau' > 0$ und $\Im\tau' = \frac{(ad-bc)\Im\tau}{|c\tau+d|^2}$, folgt $ad - bc > 0$, d.h. $A \in SL(2, \mathbb{Z})$.

Die Schlüsse sind umkehrbar und zeigen daher auch „ \Leftarrow “.

■

Definition 5.18

$$\wp(\tau, z) := \wp(z, \underbrace{\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}}_{L_\tau})$$

$A(\tau), B(\tau)$ die Koeffizienten, so dass

$$\left(\frac{d}{dz} \wp(\tau, z) \right)^2 = 4\wp(\tau, z)^3 + A(\tau)\wp(\tau, z) + B(\tau)$$

Satz 5.23 Für $G = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$ gilt:

$$\begin{aligned} \wp(G\tau, \frac{z}{c\tau+d})(c\tau+d)^{-2} &= \wp(\tau, z) \\ A(G\tau)(c\tau+d)^{-4} &= A(\tau) \\ B(G\tau)(c\tau+d)^{-6} &= B(\tau) \end{aligned}$$

5 Elliptische Funktionen

Beweis: Zur Erinnerung: $\frac{d}{dz}\wp(\tau, z) = 4\wp(\tau, z)^3 + A(\tau)\wp(\tau, z) + B(\tau)$

$$\begin{aligned} \wp(G\tau, \frac{z}{c\tau+d})(c\tau+d)^{-2} &= \frac{1}{(c\tau+d)^2} \left(\frac{1}{(\frac{z}{c\tau+d})^2} + \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}G\tau + \mathbb{Z}, \gamma \neq 0} \frac{1}{(\frac{z}{c\tau+d} - \gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right) \\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}G\tau + \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{(z - (c\tau+d)\gamma)^2} - \frac{1}{((c\tau+d)\gamma)^2} \right) \\ \text{mit } \delta := (c\tau+d)\gamma \text{ folgt: } &= \frac{1}{z^2} + \sum_{\delta \in \mathbb{Z}(a\tau+b) + \mathbb{Z}(c\tau+d)} \left(\frac{1}{(z - \delta)^2} - \frac{1}{\delta^2} \right) \end{aligned} \quad (*)$$

Eine Basis von $(*)$ ist:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ also ist auch } \begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix} \text{ eine Basis, da } \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \\ \Rightarrow (*) = \wp(\tau, z) \end{aligned}$$

Laurententwicklung von \wp um $z = 0$:

$$\begin{aligned} \wp(\tau, z) &= \frac{1}{z^2} + c_1 A(\tau) z^2 + c_2 B(\tau) z^4 + \dots, \quad c_1, c_2 = \text{const, unabhängig von } z, \tau \\ &= \wp(G\tau, \frac{z}{(c\tau+d)}) (c\tau+d)^{-2} \\ &= \frac{1}{(c\tau+d)^2} \left(\frac{1}{(\frac{z}{c\tau+d})^2} + c_1 A(G\tau) \frac{z^2}{(c\tau+d)^2} + c_2 B(G\tau) \frac{z^4}{(c\tau+d)^4} + \dots \right) \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert die Behauptung für $A(G\tau)$ und $B(G\tau)$. ■

Bemerkung: In dem Gitter $\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}1$ hat \wp die Periode 1, die typische Funktion mit Periode 1 ist $e^{2\pi iz = \zeta}$. Für $G := [\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}]$ gilt $G\tau = \tau + 1$, $\frac{z}{c\tau+d} = z$. Nach obigem Satz hat also \wp auch die Periode 1 bzgl. τ . Sei $q := e^{2\pi i\tau}$.

Satz 5.24

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \wp(\tau, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(q^{n/2}\zeta^{1/2} - q^{-n/2}\zeta^{-1/2})^2} + \frac{1}{12} \left(1 - 12 \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \frac{1}{q^{n/2} - q^{-n/2}} \right)$$

Es gilt die Konvention $\xi^{1/2} = e^{2\pi iz/2}$ für $\xi = \zeta, q$.

Beweis: Sei τ fix, die Reihe konvergiert gleichmäßig absolut auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z})$ (ohne Beweis). Die Reihe stellt eine in $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ holomorphe Funktion dar

(sei $\tilde{\wp}(z)$ die rechte Seite). Singularitäten:

$$z : \frac{1}{(q^{n/2}\zeta^{1/2} - q^{-n/2}\zeta^{-1/2})^2} = \frac{q^n\zeta}{(q^n\zeta - 1)^2}$$

Singularität falls: $q^n\zeta = 1$

$$\iff 2\pi i\tau n + 2\pi iz \in 2\pi i\mathbb{Z} \iff z \in -n\tau + \mathbb{Z}$$

Hauptteil von $\tilde{\wp}$ bei 0:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\zeta^{1/2} - \zeta^{-1/2})^2} &= \frac{1}{4(\sinh^2(\pi iz))} \\ (\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = x(1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \dots)) \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2 z^2 (1 + O(z^2))} = \frac{1}{(2\pi i)^2 z^2} \end{aligned}$$

Also ist $\frac{1}{(2\pi i)^2} \wp(\tau, z) - \tilde{\wp}(z)$ holomorph bei 0, also holomorph in allen $\gamma \in \mathbb{Z}\gamma + \mathbb{Z}$ (doppelt periodisch), also nach Liouville I konstant. Der Wert ist 0, da $\wp(\tau, z)$ das Konstantglied gleich 0 hat in der Laurententwicklung um 0, ebenso für $\tilde{\wp}(z)$.

Konstantglied von $\tilde{\wp}(z) =$ Konstantglied von:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\zeta^{1/2} - \zeta^{-1/2})^2} + \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{1}{(q^{n/2} - q^{-n/2})^2} + \\ \frac{1}{12} \left(1 - 12 \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{1}{(q^{n/2} - q^{-n/2})^2} \right) \\ \text{Konstantglied von } \left(\frac{1}{\zeta^{1/2} - \frac{1}{\zeta^{-1/2}}} \right)^2 + \frac{1}{12} = 0 \quad (\text{siehe unten}) \end{aligned}$$

■

Korollar 5.4 Für $|q| \leq \min(|\zeta|, |\zeta|^{-1})$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi i)^2} \wp(\tau, z) &= \frac{1}{\zeta^{1/2} - \zeta^{-1/2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{d|n} d(\zeta^d + \zeta^{-d}) q^n \right) \\ &\quad + 12 \left(1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) \right) q^n \end{aligned}$$

Dabei ist $\sigma_1(n) := \sum_{d|n} d$.

5 Elliptische Funktionen

Beweis:

$$\frac{1}{(a^{1/2} - a^{-1/2})^2} = \frac{a}{(a-1)^2} \underset{|a| \leq 1}{=} \frac{d}{da} \frac{1}{1-a} = \sum_{k=1}^{\infty} k a^k$$

Damit: $\sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \frac{1}{(q^{n/2} - q^{-n/2})^2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(q^{n/2} - q^{-n/2})^2}$

$$\underset{a=q^n}{=} 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} k q^{nk} = 2 \sum_{l=1}^{\infty} q^l \underbrace{\sum_{n \cdot k=l} k}_{=\sigma_1(l)}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{1}{(q^{n/2} \zeta^{1/2} - q^{-n/2} \zeta^{-1/2})^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(q^{n/2} \zeta^{1/2} - q^{-n/2} \zeta^{-1/2})^2} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(q^{-n/2} \zeta^{1/2} - q^{n/2} \zeta^{-1/2})^2} \end{aligned}$$

($a = q^n \zeta, |a| < 1, |q^n \zeta| < 1$, weil $|q\zeta| < 1$, weil $|q| < |\zeta^{-1}|$ und
 $a = q^n \zeta^{-1}, |a| < 1, |q^n \zeta^{-1}| < 1$, weil $|q\zeta^{-1}| < 1$, weil $|q| < |\zeta^{-1}|$ ist.)

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} k q^{nk} \zeta^k + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} k q^{nk} \zeta^{-k} \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} q^l \sum_{k|l} k \zeta^k + \sum_{l=1}^{\infty} q^l \sum_{k|l} k \zeta^{-k} \end{aligned}$$

■

Definition 5.19 Die Zahlen B_n aus der Taylorentwicklung von

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n, \quad |x| < 2\pi, x \in \mathbb{C}$$

heißen **Bernoulli Zahlen**.

Bemerkung:

- Bestimmung der B_n :

$$\begin{aligned} x &= \left(\sum \frac{B_n}{n!} x^n \right) (e^x - 1) = \left(\sum \frac{B_n}{n!} x^n \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \right) \\ &= \sum_l \sum_{\substack{m+n=l \\ m \geq 1}} \left(\frac{B_n}{n!} \frac{1}{m!} \right) x^l \\ \Rightarrow &\sum_{\substack{m+n=l \\ m \geq 1}} \left(\frac{B_n}{n!} \frac{1}{m!} \right) = \delta_{l,1} \end{aligned}$$

Zusammen mit $B_0 = 1$ lassen sich die B_n rekursiv aus der letzten Zeile bestimmen:

k	1	2	4	6	8	10	\dots
B_k	1	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{5}{66}$	\dots

- $B_k = 0$ für ungerades $k \geq 3$

Beweis:

$$\begin{aligned} \text{Betrachte: } &\frac{x}{e^x - 1} + \frac{1}{2}x = \sum_{n \neq 0} \frac{B_n}{n!} x^n &(*) \\ \text{linke Seite } &= \frac{x + \frac{1}{2}x(e^x - 1)}{e^x - 1} = \frac{1}{2} \frac{x(e^x + 1)}{e^x - 1} \end{aligned}$$

Der letzte Bruch ist aber invariant unter $x \mapsto -x$, ist also eine gerade Funktion; deswegen verschwinden die ungeraden Potenzen auf der rechten Seite von (*). ■

Lemma 5.3

$$\frac{\coth \frac{x}{2}}{2} = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} x^{2k-1}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \text{linke Seite } &= \frac{1}{2} \frac{e^{x/2} + e^{-x/2}}{e^{x/2} - e^{-x/2}} = \frac{1}{e^x - 1} + \frac{1}{2} \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{n \neq 1} \frac{B_n}{n!} x^{n-1} \end{aligned}$$

Dann folgt die Behauptung aus Definition 5.19. ■

5 Elliptische Funktionen

Lemma 5.4

$$\frac{1}{(\zeta^{1/2} - \zeta^{-1/2})^2} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \left(\frac{1}{z^2} - \sum \frac{B_{2k}}{(2k)!} (2k-1)(2\pi i)^{2k} z^{2k-2} \right)$$

Dabei ist $\zeta = e^{2\pi i} z$.

Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(e^{x/2} - e^{-x/2})^2} &= \frac{1}{4 \sinh^2(x/2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overbrace{\frac{\sinh^2(x/2) - \cosh^2(x/2)}{\sinh^2(x/2)}}^{-1} \\ &= \frac{d}{dx} \coth\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{x^2} - \sum \frac{B_{2k}}{(2k)!} (2k-1)x^{2k-2} \end{aligned}$$

Dann folgt die Behauptung mit $x = 2\pi iz$. ■

Definition 5.20

$$\begin{aligned} \sigma_r(n) &:= \sum_{d|n} d^r \\ E_{2k} &:= 1 - \frac{4k}{B_{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) q^n \\ \zeta(s) &:= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \text{Riemannsche } \zeta\text{-Funktion} \end{aligned}$$

Bemerkung:

- $B_{2k} \neq 0$ (siehe unten)
- Die Reihe E_{2k} ist absolut konvergent: $|q| < 1$ und $\sigma_{2k-1} \leq n^{2k}$
- $E_2 = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) q^n$

Satz 5.25

$$\text{Es gilt } \wp(\tau, z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=2}^{\infty} 2(2k-1)\zeta(2k)E_{2k}(\tau)z^{2k-2}$$

Ferner gilt

$$E_{2k}(\tau) = \left(\sum_{G \in \left(\langle \pm \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rangle \setminus SL(2, \mathbb{Z}) \right)} \frac{1}{(c\tau + d)^{2k}} \right)$$

dabei ist $G = \begin{bmatrix} * & * \\ c & d \end{bmatrix}$ und die Formel gilt für E_{2k} mit $k \geq 2$.

Beweis: Zweimal Laurententwicklung von \wp um 0, dann Vergleich der Koeffizienten:

$$\wp(\tau, z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z} \\ \gamma \neq 0}} \frac{1}{(z - \gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2}$$

Der $(2k - 2)$ -te Koeffizient der Laurententwicklung um $z = 0$ ist:

$$\begin{aligned} \frac{(2k-1)!}{(2k-2)!} \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z} \\ \gamma \neq 0}} \frac{1}{\gamma^{2k}} &= (2k-1) \sum_{\substack{m,n \in \mathbb{Z} \\ (m,n) \neq (0,0)}} \frac{1}{(m\tau + n)^{2k}} = (2k-1) \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{\substack{m,n \in \mathbb{Z} \\ \text{ggT}(m,n)=1}} \frac{1}{(dm\tau + dn)^{2k}} \\ &= (2k-1)\zeta(2k)2 \sum_{\substack{c,d \in \mathbb{Z}, \text{ggT}(c,d)=1, \\ c \geq 0 \wedge (c=0 \Rightarrow d=1)}} \frac{1}{(c\tau + d)^{2k}} \\ \text{Betrachte } &\sum_{\substack{c,d \in \mathbb{Z}, \text{ggT}(c,d)=1, \\ c \geq 0 \wedge (c=0 \Rightarrow d=1)}} \frac{1}{(c\tau + d)^{2k}} : \\ \text{Sei } G := \left\langle \pm \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle : \quad G \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} &= G \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \\ \text{für: } \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \text{ mit } \text{ggT}(c, d) = 1 & \\ \text{NR.: } \pm \begin{bmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} &= \pm \begin{bmatrix} a + *c & b + *d \\ c & d \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Andererseits: ist der $(2k-2)$ -te Koeffizient der Laurententwicklung von der rechten Seiten von:

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \wp(\tau, z) = \underbrace{\frac{1}{(\zeta^{1/2} - \zeta^{-1/2})^2}}_I + \underbrace{\sum_{d|n} d(\zeta^d + \zeta^{-d}) q^n + \frac{1}{12} E_2}_II$$

um $z = 0$:

$$\begin{aligned} - (2\pi i)^{2k} \frac{B_{2k}}{(2k)!} &\quad \text{Teil I nach Lemma 5.4} \\ + (2\pi i)^{2k} \frac{1}{(2k-2)!} \sum_{n=1}^{\infty} \left(2 \sum_{d|n} d^{2k-1} \right) q^n \\ &= -(2\pi i)^{2k} \frac{B_{2k}}{(2k)!} (2k-1) E_{2k}(\tau) \end{aligned}$$

Fazit: $E_{2k}(\tau) = \sum_{G \in \langle \pm \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rangle \setminus SL(2, \mathbb{Z})} \frac{1}{(c\tau + d)^{2k}}$

■

Korollar 5.5

$$\zeta(2k) = -\frac{1}{2} \frac{(2\pi i)^{2k}}{(2k)!} B_{2k}$$

5 Elliptische Funktionen

Beispiel: 5.6 Die Berechnung von ζ erfolgt mittels des Korollars:

- $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$
- $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$

Bemerkung:

- $\zeta(2k+1)$ ist bisher unbekannt
- $(\wp(\tau, z)')^2 = 4\wp(\tau, z)^3 - 20a\wp(\tau, z) - 28b = 4(\wp(\tau, z)')^3 - \pi^4 \frac{4}{3}E_4(\tau)\wp(\tau, z) - \pi^6 \frac{8}{27}E_6(\tau)$

6 Modulformen

6.1 Die Modulgruppe und die obere Halbebene

Definition 6.1

Modulgruppe: $\Gamma := SL(2, \mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \mid ad - bc = 1 \right\}$
obere Halbebene: $\mathfrak{h} := \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}$

Operationen von Γ auf \mathfrak{h} : zu $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma$ und $z \in \mathfrak{h}$ sei $Az = \frac{az+b}{cz+d}$. Es ist

- $\mathbb{1}_2 z = z$ (sogar $\pm \mathbb{1}_2 z = z$)
- $A(Bz) = (AB)z$

Spezielle Elemente von Γ

- $S := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $Sz = \frac{-1}{z}$ (*Spiegelung*)
- $T := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $Tz = \frac{z+1}{1}$ (*Translation*)

$$\text{Nach Beispiel 3.8 gilt: } \Im(Az) = \frac{\Im z}{|cz+d|^2}, \text{ beachte } ad - cb = 1 \quad (*)$$

Moduldreieck: Fundamentalbereich von \mathfrak{h} bzgl. Γ (siehe Abbildung 6.1)

Bemerkung: $S^2 = -\mathbb{1}_2$ (wobei $\mathbb{1}_2$ die 2×2 Einheitsmatrix bezeichnet), $S^4 = \mathbb{1}_2$
 $ST = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $(ST)^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $(ST)^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -\mathbb{1}_2$, $(ST)^6 = \mathbb{1}_2$,
 $|\langle S \rangle| = 4$, $|\langle ST \rangle| = 6$, $Si = \frac{-1}{i} = i$, $(ST)\rho = \rho$.

Satz 6.1 Für ein $z \in F$ existiert ein $A \in \Gamma$ mit $Az \in F$, dann ist $Az = z$. Es gilt

$$\Gamma_z (= \{A \in \Gamma \mid Az = z\}) = \begin{cases} \langle \pm \mathbb{1}_2 \rangle, & z \neq i, \rho \\ \langle S \rangle, & z = i \\ \langle ST \rangle, & z = \rho \end{cases}$$

(Γ_z ist der Stabilisator von z)

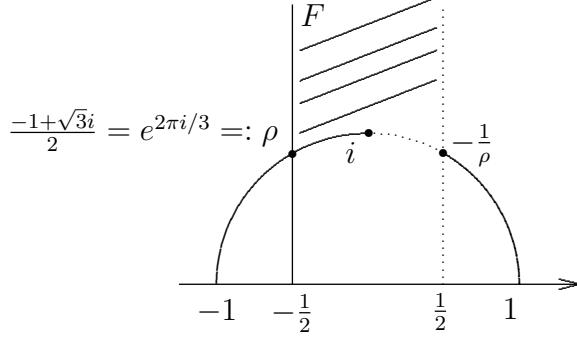


Abbildung 6.1: Fundamentalbereich von \mathfrak{h} .
 i gehört zu F , $-\frac{1}{\rho}$ gehört nicht zu F .

Beweis: Sei $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma$, $Az \in F$.

O.B.d.A. $\Im(Az) \geq \Im(z)$ (sonst ersetze z durch Az und A durch A^{-1}). Dann gilt $|cz + d| \leq 1$ (aus (*)). Wegen $c \in \mathbb{Z}$ und

$$c^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = c^2 \left(\frac{3}{4} \right) \leq \underbrace{c^2 \Im z^2}_{d \in \mathbb{R} \Rightarrow \Im d = 0} = \Im(cz + d)^2 \leq |cz + d|^2 \leq 1$$

(links steht der kleinste Wert, den $c^2 \Im z^2$ annehmen kann, für $z = \rho$). Es folgt $c^2 \frac{3}{4} \leq 1$ mit $c \in \mathbb{Z}$ ist dann $|c| \leq 1$:

Fall $c = 0$: dann $A = \pm \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $Az = z + b \Rightarrow b = 0$ wegen $b \in \mathbb{Z}$, $z = Az = z + b \in F$ und wegen $-\frac{1}{2} \leq \Re(z), \Re(z + b) < \frac{1}{2}$ folgt $b = 0$, $A = \pm \mathbb{1}_2$

Fall $c = -1$: ersetze A durch $-A$ und gehe zum nächsten Fall

Fall $c = 1$: dann $|z + d| \leq 1$, daher (mit $z = x + iy$)

$$\underbrace{(x + d)^2}_{(\Re(z+d))^2} \leq |z + d|^2 \leq 1, \text{ d.h. } |d| - |x| \leq |x + d| \leq 1$$

d.h. $|d| \leq 1 + |x| \leq \frac{3}{2}$, da $|x| = |\Re(z)|$ und $-\frac{1}{2} \leq \Re(z) < \frac{1}{2}$.

Also $d = 0, \pm 1$, und $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0, \pm 1 \end{bmatrix}$.

Unterfall: $z = \rho$: Fallunterscheidung für d :

Unter-Unterfall $d = 0$: dann: $\det A = 1 \Rightarrow b = -1$ und $A\rho = a - \frac{1}{\rho}$. Es folgt $a = \pm 1$ (sonst $a - \frac{1}{\rho} \notin F$). $\Rightarrow A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = (ST)^2$

Unter-Unterfall $d = \pm 1$: dann $A = \begin{bmatrix} a & a-1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (sonst $\det A \neq 1$) und dann $A\rho = \frac{a\rho + a - 1}{\rho + 1} = a - \frac{1}{\rho + 1} = a + \rho$, daher $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = ST$

Unter-Unterfall $d = -1$: Unmöglich, da $\underbrace{\Re(\rho - 1)}_{cz+d} = -\frac{3}{2}$, also
 $|cz + d| > \frac{3}{2} > 1$.

Unterfall $z \neq \rho$: dann $\frac{3}{4} + (x + d)^2 <_{z \neq \rho} |z + d|^2 \leq 1$, daher $|d| - |x| \leq |x + d| < \frac{1}{2}$,
d.h. $|d| < \frac{1}{2} + |x| \leq 1$ also $d = 0$. $A = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $|z| = |cz + d| \leq 1$, also $|z| = 1$.
 $Az = a - \frac{1}{z} \in F$ (mit $|z| = 1$) impliziert $a = 0, z = i \Rightarrow A = S$.

■

Korollar 6.1 Es ist $z \in \mathfrak{h}$ Fixpunkt von Γ (d.h. $\Gamma_z \neq \{\pm \mathbb{1}_2\}$), genau dann wenn $z = Ai$ oder $z = A\rho$, für ein $A \in \Gamma$ ist.

Satz 6.2 $SL(2, \mathbb{Z})$ wird von S und T erzeugt.

Beweis: $G := \langle S; T \rangle \subseteq \Gamma$.

(**) Ist $z \in \mathfrak{h}$, dann existiert ein $B \in G$ mit $Bz \in F$.

Wähle $z_0 \in F$ fix. Sei $A \in \Gamma$, dann existiert $B \in G$ mit $BAz_0 \in F$ (nach (**)). Dann folgt (voriger Satz) $BAz_0 = z_0$, daher $BA \in \Gamma_{z_0} \subseteq G$ daher $A \in B^{-1}G = G$.

(zu **): Sei $A \in G$ mit $\Im(Az) = \text{maximal}$. Wähle $n \in \mathbb{Z}$ mit $-\frac{1}{2} \leq \Re(\underbrace{Az + n}_{T^n Az}) < \frac{1}{2}$

oder $ST^n Az \in F$. Dann $\underbrace{T^n A}_{\in G} z \in F$: wäre $|T^n Az| < 1$, so $\Im(ST^n Az) = \frac{\Im(T^n A)}{|Az|} >$

$\Im(T^n Az) = \Im(Az)$ im Widerspruch zur Maximalität von $\Im(Az)$. Also $T^n A(z) \in F$ oder $T^n Az \in \text{»dem gestrichelten Halbbogen in Abbildung 6.1«}$, der nicht zu F gehört. Dann ist aber $ST^n Az \in \text{»dem Teil der Bogens, der zu } F \text{ gehört «.}$

■

6.2 Modulformen

Definition 6.2 Sei $k \in \mathbb{Z}$: Eine schwache Modulform vom Gewicht k (auf Γ) ist eine in \mathfrak{h} meromorphe Funktion f , so dass

$$f(Az)(cz + d)^{-k} = f(z) \quad \forall A \in \Gamma \quad (A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix})$$

Bemerkung: Statt Γ betrachtet man oft auch andere Untergruppen, z.B.:

$$\Gamma_0(l) := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \mid b|c \right\}$$

Satz 6.3 Sei f meromorph in \mathfrak{h} . Dann ist f schwache Modulform vom Gewicht k , genau dann wenn gilt:

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{z}\right)z^{-k} &= f(z) \\ f(z+1) &= f(z) \end{aligned}$$

6 Modulformen

Beweis: Der Beweis folgt aus $\Gamma = \langle S, T \rangle$ und dem folgenden Lemma. ■

Lemma 6.1 Sei $k \in \mathbb{Z}$. Dann wird durch

$$(f|_k A) := f(Az)(cz + d)^{-k}$$

eine Rechts-Operation von Γ auf $\text{Mer}(\mathfrak{h})$ erklärt (d.h. $(f|_k \mathbb{1}_2) = f, ((f|_k A)|_k B) \stackrel{(+)}{=} (f|_k (AB))$)

Beweis: Beweis von (+): (+) ist äquivalent zu $(cz + d)(c'z + d') = c''z + d'', \text{ mit } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{bmatrix}$ (die Gleichung folgt durch Nachrechnen) ■

Satz 6.4 Es gibt keine nichttrivialen schwachen Modulformen von ungeradem Gewicht.

Beweis: Sei f vom Gewicht k auf Γ , dann gilt

$$\underbrace{f(-\mathbb{1}_2 z)(-1)^{-k}}_{=f(z)} = f(z),$$

also k ungerade, so ist $f \equiv 0$. ■

Bemerkung: Die schwachen Modulformen vom Gewicht k bilden einen Vektorraum über \mathbb{C} .

Bemerkung: Die Funktionalgleichung einer schwachen Modulform von geradem Gewicht k kann man auch folgendermaßen interpretieren:

$$\begin{aligned} A^* f(z)(dz)^k &:= f(Az)(dAz)^{k/2} \\ \left(\text{mit } dAz = d\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{1}{(cz+d)^2} dz \right) \\ &= f(Az) \frac{1}{(cz+d)^k} dz = f(z) dz \end{aligned}$$

Dabei induziert A einen Operator A^* auf Differentialformen.

Satz 6.5 Sei f eine schwache Modulform vom Gewicht k auf Γ . Dann existiert eine in $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ meromorphe Funktion g , so dass $f(z) = g(e^{2\pi iz})$ ist.

Beweis: Mit $q := e^{2\pi iz}$ ist

$$g(q) := f\left(\frac{1}{2\pi i} \log q\right)$$

mit irgendeinem Zweig des Logarithmus in einer Umgebung von q , g ist wohldefiniert, denn $f(z+n) = f(z) \forall n \in \mathbb{Z}$. ■

Definition 6.3 Eine schwache Modulform vom Gewicht k heißt **meromorph**, falls g meromorph auf \mathbb{D} (d. h. zusätzlich meromorph bei 0) ist.

Satz 6.6 Ist f meromorphe Modulform vom Gewicht k auf Γ , dann besitzt f eine Entwicklung der Gestalt

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} a_f(n) e^{2\pi i n \mathbb{Z}}$$

Diese Reihe ist absolut konvergent.

Beweis: Die Entwicklung ist die Laurententwicklung von g bei 0. ■

Bemerkung: Ist f meromorphe Modulform vom Gewicht k , dann hat f nur endlich viele Pole in F , dem Moduldreieck.

Definition 6.4 Eine meromorphe Modulform heißt **holomorph bei $i\infty$** , falls $a_f(n) = 0 \forall n < 0$.

Definition 6.5 Einige wichtige Definitionen:

1. $M_k(\Gamma) =$ die Menge aller holomorphen Modulformen vom Gewicht k auf Γ , die auch bei $i\infty$ holomorph sind

$$= \left\{ f : \mathfrak{h} \xrightarrow{\text{holomorph}} \mathbb{C} \mid \begin{array}{l} i) \quad f(az)(cz+d)^{-k} = f(z) \forall A \in SL(2, \mathbb{Z}) \\ ii) \quad f \text{ besitzt eine absolut konvergente Entwicklung der Gestalt} \\ f(z) = \sum_{n \geq 0} a_f(n) e^{2\pi i n \mathbb{Z}} \end{array} \right\}$$

2.

$$S_k(\Gamma) = \{ f \in M_k(\Gamma) \mid a_f(0) = 0 \}$$

die Menge der **Spitzenformen** vom Gewicht k auf Γ

3. $K(\Gamma) =$ Menge aller meromorphen Modulformen vom Gewicht 0

$$= \left\{ f \text{ meromorph auf } \mathfrak{h} \mid \begin{array}{l} i) \quad f(Az) = f(z) \forall A \in SL(2, \mathbb{Z}) \\ ii) \quad f \text{ besitzt eine absolut konvergente Entwicklung der Gestalt} \\ f(z) = \sum_{n \geq -N} a_f(n) e^{2\pi i n \mathbb{Z}} \end{array} \right\}$$

Die Elemente von $K(\Gamma)$ heißen **Modulfunktionen** auf Γ

Bemerkung:

- $M_k(\Gamma), S_k(\Gamma)$ sind Vektorräume über \mathbb{C} , $S_k(\Gamma)$ ist ein Untervektorraum von $M_k(\Gamma)$
- $K(\Gamma)$ ist sogar ein Körper
- $(f, g) \mapsto f \cdot g$ definiert Abbildungen $M_k(\Gamma) \times M_l(\Gamma) \longrightarrow M_{k+l}(\Gamma)$

6 Modulformen

Beispiel: 6.1 Einige Beispiele für Modulformen:

1.

$$E_{2k} = 1 - \frac{4k}{B_{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) q^n \in M_{2k}(\Gamma) \text{ für } k \geq 2$$

Es ist $E_{2k}(z) = \sum_{A \in (\langle \pm T \rangle \setminus SL(2, \mathbb{Z}))} \mathbb{1}_2|_k A$ hieraus erkennt man die Transformationsformel.

Speziell:

- $E_4 = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) q^n \in M_4(\Gamma)$
- $E_6 = 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) q^n \in M_6(\Gamma)$

$$2. \Delta := \frac{E_4^3 - E_6^2}{1728} = q + O(q) \in S_{12}(\Gamma)$$

$$3. j := \frac{E_4^3}{\Delta} = q^{-1} + 744 + O(q) \in K(\Gamma)$$

Bemerkung:

- $E_4(\rho) = 0, \rho = e^{2\pi i/3}, \Gamma_\rho = \langle ST \rangle$

$$E_4(\rho) = E_4(ST\rho)(\rho + 1)^{-4} = E_4(\rho) \underbrace{e^{-2\pi i 4/6}}_{\neq 1} \Rightarrow E_4(\rho) = 0$$

- $E_6(i) = 0$

$$E_6(i) = E_6(Si)(i)^{-6} = E_6(i)i^2 \Rightarrow E_6(i) = 0$$

- $f(\rho) = 0, \text{ falls } f \in M_k \text{ und } k \equiv 2, 4, 8, 10 \pmod{12}$
- $f(i) = 0, \text{ falls } f \in M_k \text{ und } k \equiv 2, 6, 10 \pmod{12}$

6.3 Die Valenzformel

Satz 6.7 (Valenzformel) Sei $f \neq 0$ eine meromorphe Modulform vom Gewicht k auf Γ . Dann gilt:

$$\sum_{\substack{z \in F \\ z \neq i, \rho}} \text{ord}_z f + \frac{1}{2} \text{ord}_i f + \frac{1}{3} \text{ord}_\rho f + \text{ord}_{i\infty} f = \frac{k}{12}$$

$$(n_0 := \text{ord}_{i\infty} : f = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_f(n) q^n, a_f(n_0) \neq 0, q = e^{2\pi iz}, z \in \mathfrak{h})$$

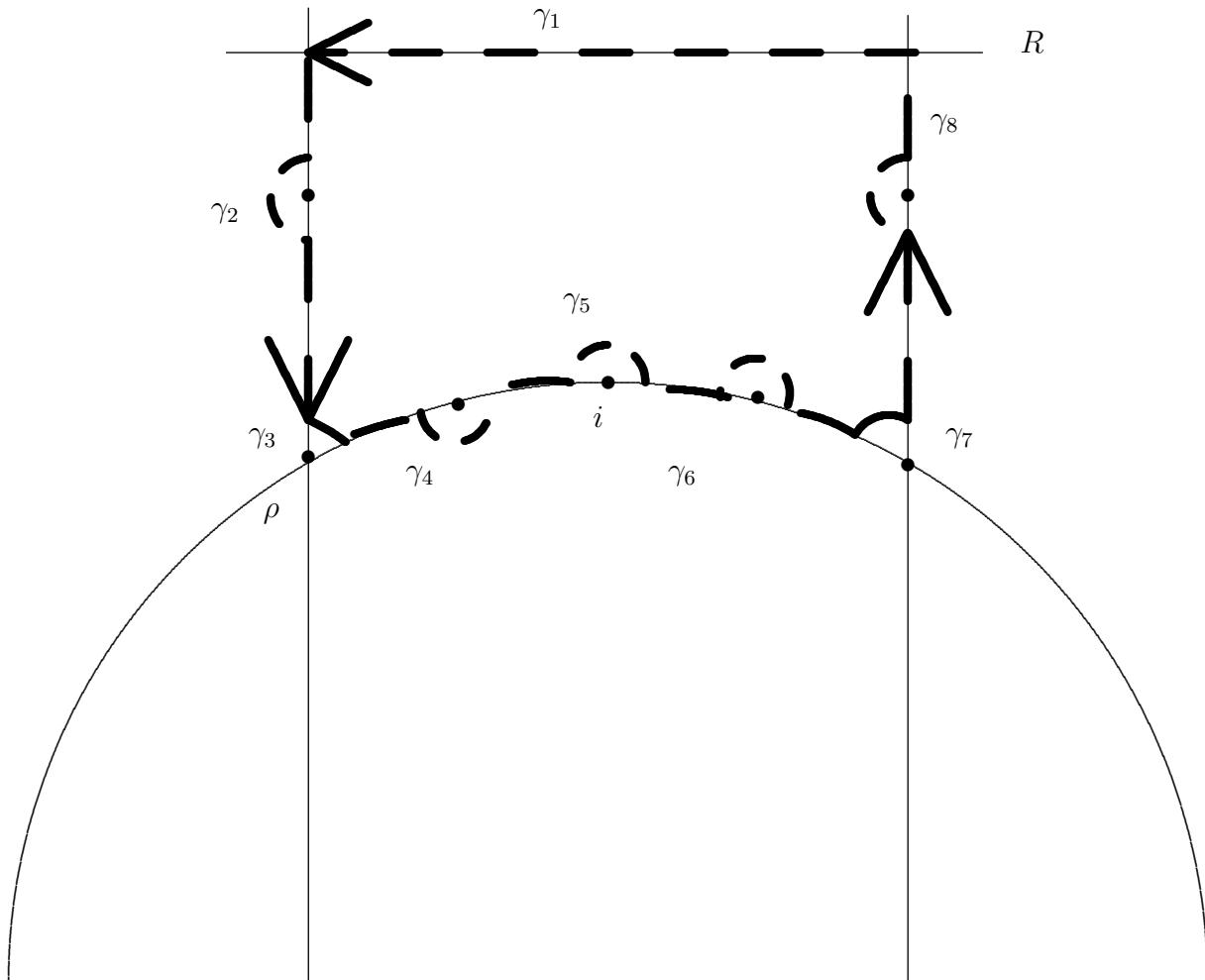


Abbildung 6.2: Beweis der Valenzformel

Null- bzw. Polstellen auf dem Rand von $\gamma_2, \gamma_4, \gamma_6$ und γ_8 wird »ausgewichen«. γ_3, γ_5 und γ_7 weichen den Punkten ρ, i und $-\frac{1}{\rho}$ aus.

6 Modulformen

Beweis: $f = g(q)$ und g ist meromorph in $|q| < 1$. Eine Konstante R sei so gewählt, dass $f(z)$ für $\Im z \geq R$ keine weiteren Null- oder Polstellen mehr hat (siehe Abbildung 6.2).

$$Es gilt: \sum_{z \in F} \operatorname{ord}_z f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1 + \dots + \gamma_8} d\log(f)$$

Denn es gilt:

- mit $T = [\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}]$:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} d\log(f) &= - \int_{\gamma_8 (= T\gamma_2)} \underbrace{d\log(f \circ T^{-1})}_{=f} = - \int_{\gamma_8} d\log(f) \\ &\Rightarrow \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_8} = 0 \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} d\log(f) &= - \oint_{|q|=e^{2\pi i R}} d\log(g) = - \operatorname{ord}_0 g = - \operatorname{ord}_{i\infty} f \\ &\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f = - \operatorname{ord}_{i\infty} f \end{aligned}$$

- Sei ϵ der Radius der kleinen Kreisbögen γ_3 und γ_7 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_3} d\log(f) &\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{1}{6} \operatorname{ord}_\rho f, \text{ das gleiche gilt für } \int_{\gamma_7} d\log(f) \\ &\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_7} \right) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{1}{3} \operatorname{ord}_\rho f \end{aligned}$$

Der Bruch $1/6$ kommt zustande, da es sich bei γ_3 bzw. γ_7 , im Grenzwert, um einen Sechstel-Kreis handelt.

- Sei ϵ der Radius des kleinen Kreisbogens γ_5 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_5} d\log(f) &\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \operatorname{ord}_i f \\ &\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_5} d\log(f) = \frac{1}{2} \operatorname{ord}_i f \end{aligned}$$

Der Bruch $1/2$ kommt zustande, da es sich bei γ_5 , im Grenzwert, um einen Halbkreis handelt.

- mit $S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ($z \mapsto -\frac{1}{z}$) und $f \circ S = f(z)z^k$:

$$\int_{\gamma_6} d\log(f) = - \int_{\gamma_4 = -S\gamma_4} d\log(f \circ S^{-1}) = - \int_{\gamma_4} (d\log(f) + d\log(z^k))$$

$$\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\gamma_4} \frac{k}{z} dz = \frac{k}{12}$$

Der Bruch $k/12$ kommt zustande, da es sich bei γ_4 , im Grenzwert, um einen Zwölftel-Kreis handelt.

Alles zusammengenommen beweist die Behauptung. ■

Bemerkung:

- In dem Moduldreieck D existieren nur endlich viele Null- oder Polstellen von f
- $\sum_{z \in \Gamma \setminus \mathfrak{h}} \frac{2}{\#\Gamma_z} \operatorname{ord}_z f + \underbrace{\operatorname{ord}_{i\infty} f}_{= \frac{k}{12}}$

Beispiel: 6.2 $f = E_4$, in der Valenzformel stehen auf der linken Seite nur Terme ≥ 0 und rechts steht $\frac{1}{3}$, also

$$E_4(z) = 0 \iff z = \rho$$

Analog: $f = E_6$, auf der linken Seite der Valenzformel sind aller Terme ≥ 0 , rechts steht $\frac{1}{2}$, also

$$E_6(z) = 0 \iff z = i$$

6.4 Der Ring der Modulformen

Definition 6.6

$$M_* = M_*(SL(2, \mathbb{Z})) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} M_k, \quad M_k \subseteq \operatorname{Hol}(\mathfrak{h})$$

$$= \operatorname{span} \{f \mid \exists k \in \mathbb{Z} : f \in M_k\}$$

heißt Ring der Modulformen auf Γ .

Bemerkung: M_* ist ein Ring.

Satz 6.8 1. $M_k = \{0\}$ für $k < 0$

2. $M_0 = \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}_2$ (konstante Funktionen)

3. $\dim M_k < \infty$ für $k > 0$

6 Modulformen

Beweis:

1. Anwendung der Valenzformel für ein $f \in M_k, k < 0, f \neq 0$:

$$\text{linke Seite} \geq 0 = \text{rechte Seite} < 0, \quad \text{Widerspruch}$$

2. Sei $f \in M_0, g := f - f(z_0) \cdot 1 \in M_0, z_0 \in \mathfrak{h}$, fix. Wäre $g \neq 0$, so wäre nach Valenzformel:

$$\underbrace{\text{linke Seite} > 0}_{\text{mind. } z_0 \text{ ist Nullstelle}} = \text{rechte Seite}, \quad \text{Widerspruch} \Rightarrow g = 0$$

3. Betrachte die Abbildung $\epsilon : M_k \longrightarrow \mathbb{C}^n$, n fix, $n > \frac{n}{12}$,

$$\epsilon : f \mapsto (a_f(0), a_f(1), \dots, a_f(n-1)),$$

ϵ ist ein Vektorraum Endomorphismus.

Behauptung: ϵ ist injektiv:

Sei $f \in M_k, \epsilon(f) = 0$, wäre $f \neq 0$, so folgt aus der Valenzformel:

$$\underbrace{\text{linke Seite} \geq n}_{i\infty \text{ ist } n\text{-fache Nullstelle}} = \text{rechte Seite} = \frac{k}{12}, \quad \text{Widerspruch, also ist } \epsilon \text{ injektiv}$$

Bemerkung: Interessant sind also nur M_k mit $k > 0$ und k gerade.

Satz 6.9 • $E_4(z) = 0 \iff z \equiv \rho = e^{2\pi i/3} \pmod{\Gamma}$

• $E_6(z) = 0 \iff z \equiv i \pmod{\Gamma}$

Beweis: Siehe 6.2

Satz 6.10 $M_2 = 0, M_4 = \mathbb{C} \cdot E_4, M_6 = \mathbb{C} \cdot E_6, M_8 = \mathbb{C} \cdot E_4^2, M_{10} = \mathbb{C} \cdot E_4 \cdot E_6$

Beweis:

$k = 2$: Valenzformel: Sei $f \in M_2$, wäre $f \neq 0$:

$$\text{linke Seite} = 0 \text{ oder } > \frac{1}{6} \text{ aber rechte Seite} = \frac{1}{6}, \quad \text{Widerspruch}$$

$k = 4$: $f \in M_4$, $g := f - f(i\infty) \cdot E_4$ hat Nullstellen bei $i\infty$ und ρ . Wäre $g \neq 0$, so wäre nach Valenzformel:

$$\text{linke Seite} \geq \frac{4}{3} = \frac{1}{3} = \text{rechte Seite}, \quad \text{Widerspruch}$$

$k = 6$: analog wie $k = 4$, nur mit i statt ρ

$k = 8$: ist $g \in M_8, g \neq 0$, so ist nach Valenzformel:

rechte Seite $= \frac{2}{3}$, also $\text{ord}_\rho g = 2$, damit analog zu $k = 4$

$k = 10$: sei $g \in M_{10}, g \neq 0$, dann folgt mit der Valenzformel:

rechte Seite $= \frac{5}{6}$, also einzige Möglichkeit: linke Seite $= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \text{ord}_g i = \text{ord } g\rho = 1$, analog zu $k = 4$

■

Satz 6.11 $M_k(k \geq 4) = S_k \oplus \mathbb{C}E_k$

(klar nach Def. von S_k)

Bemerkung:

- $\dim M_8 = 1$, also $E_8 = E_4^2$

$$E_4^2 = 1 - \frac{16}{B_8} \sum_{l=1}^{\infty} \sigma_7(l) q^l (= 1 + 240 \sum_{l=1}^{\infty} \sigma_3(l) q^l)^2$$

D.h. $\forall l \geq 1 : c \cdot \sigma_7(l) = 480\sigma_3(l) + 240^2 \sum_{\substack{k_1, k_2 > 0 \\ k_1 + k_2 = l}} \sigma_3(k_1)\sigma_3(k_2)$

Modulo:

$$\forall l \geq 1 : \sum_{d|l} d^7 = \sum_{k_1+k_2=l} l \sum_{d|k_1} d^3 + \sum_{d|k_2} d^3$$

- In \mathbb{R}^8 gibt es genau ein ganzes (d.h. $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \in \mathbb{Z}$) gerades (d.h. $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \in 2\mathbb{Z}$) unimodulare (d.h. $\det(\rho_i, \rho_j)_{1 \leq i, j \leq 8} = 1 \Rightarrow \rho_1, \dots, \rho_8$ ist Basis des Gitters) Gitter, dieses heißt E_8

$$\Theta_{E_8} := \sum_{l=8}^{\infty} \# \{ \gamma \in E_8 \mid \gamma \cdot \gamma = 2l \} q^l$$

Satz 6.12 $\Theta_{E_8} \in M_8$

(Beweis später)

Folgerung: $\Theta_{E_8} = E_4$, d.h. $\# \{ \gamma \in E_8 \mid \gamma \cdot \gamma = 2l, l \geq 1 \} = 240\sigma_3(l)$

Satz 6.13 Die Formen $E_4^a \cdot E_6^b$ mit $a, b \geq 0, 4a + 6b = k$ bilden eine Basis für M_k .

Lemma 6.2 $\Delta = \frac{E_4^3 - E_6^2}{1728} = q + O(q^2)$ hat keine Nullstellen in \mathfrak{h} .

Beweis: Valenzformel: rechte Seite $= 1$, aber $\text{ord}_{i\infty} \Delta = 1$, also keine weiteren Nullstellen. ■

Beweis:[des Satzes] Wir zeigen: jedes $f \in M_k$ schreibt sich als Polynom in E_4, E_6 (*). Das folgt durch Induktion über k . Wir benutzen

$$\cdot \times \Delta : M_k \longrightarrow S_{k+12},$$

6 Modulformen

(Multiplikation mit Δ) ist ein Vektorraum Isomorphismus. (Folgt aus dem Lemma.)

Die Behauptung (*) ist ok für $k = 0, 2, 4, 6, 8, 10$ (siehe Satz 6.10)

Induktionsannahme: Die Behauptung ist ok für M_l mit $l < k$. Sei $f \in M_k$, dann ist $g := f - a_f(0)A_4^aE_6^b$ eine Spitzenform in S_k , wo $4a + 6b = k$ (Existenz solcher a, b siehe unten).

Also $\frac{g}{\Delta} \in M_{k-12}$. Nach Induktionsannahme ist $\frac{g}{\Delta}$ ein Polynom in E_4, E_6 , damit ist

$$f = a_f(\cdot)E_4^aE_6^b + \underbrace{\Delta}_{\frac{E_4^3 - E_6^2}{1728}} \cdot \text{Polynom in } E_4, E_6$$

■

Satz 6.14 E_4, E_6 sind algebraisch unabhängig über \mathbb{C} (d.h. es gibt kein Polynom $p \in \mathbb{C}[X, Y]$ mit $p \neq 0$, so dass $p(E_4, E_6) \equiv 0$ ist)

Insbesondere sind die Formen E_4^a, E_6^b (mit $4a + 6b = k$ und $a, b \geq 0$) linear unabhängig über \mathbb{C} .

Folgerung: Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[X, Y] &\longrightarrow M_* \\ p &\longmapsto p(E_4, E_6) \end{aligned}$$

ist eine Ring-Isomorphie.

(Kern = $\{0\}$ nach vorigem Satz, Surjektivität nach dem Satz 6.13)

Insbesondere

$$M_k = \left\{ p(E_4, E_6) \mid p = \sum *X^aY^b, 4a + 6b = k \right\},$$

denn $\mathbb{C}[X, Y]$ ist ein graduierter Ring $\mathbb{C}[X, Y] = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathbb{C}[X, Y]_{(k)}$, wo $\mathbb{C}[X, Y]_{(k)} =$ Unterraum der homogenen Polynome vom Grad k ist, wobei die Graduierung so gewählt wurde, dass $\deg(X) = 4, \deg(Y) = 6$ ist.

Beweis: Annahme: Es existiert ein $p \in \mathbb{C}[X, Y], p \neq 0$ mit $p(E_4, E_6) \equiv 0$, o.B.d.A habe p minimalen Grad ($\Rightarrow XY \nmid p$).

$$\text{Schreibe } p = \sum_{r,s} p_{r,s} X^r Y^s = \sum_{k \geq 0} \underbrace{\sum_{\substack{r,s \\ 4r+6s=k}} p_{r,s} X^r Y^s}_{:= p_{(k)}}$$

Dann ist schon $p_{(k)}(E_4, E_6) = 0 \Rightarrow p = p_{(k_0)}$ für ein geeignetes k_0 . Denn $0 = p(E_4(Az), E_6(Az)) = \sum_{k \geq 0} p_{(k)}(E_4(z), E_6(z))(cz + d)^{-k}$ (da ja $p_{(k)}(E_4, E_6) \in M_k$)

Für $d \rightarrow \infty$ folgt $p_{(k)}(E_4, E_6) \rightarrow 0$, betrachte nämlich die rechte Seite bei fixem z und fixem c als Polynom in d . Dieses Polynom hat unendlich viele Nullstellen d :

$$A = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \leftarrow A \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & -* \\ c & c + dx \end{pmatrix}$$

6.4 Der Ring der Modulformen

$$Schreibe p = p_{(k_0)} = c_1 E_4^{K_0/4} + \sum_{\substack{4r+6s=k_0 \\ r,s > 0}} c_{r,s} E_4^r E_6^s + c_2 E_6^{k_0/6}$$

Wegen der Minimalität der Grade von $p_{(k_0)}$ folgt $c_1 \neq 0$ oder $c_2 \neq 0$. Für $z = i, \rho$ folgt $c_1 E_4^{k_0/4} + c_2 E_6^{k_0/6}$ hat $z = \rho, i$ als Nullstellen, Widerspruch! ■

Lemma 6.3 Sei k gerade, dann gilt

$$\# \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}, 4a + 6b = k\} = \left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor + \delta(k \not\equiv 2 \pmod{12})$$

Bemerkung: $\# \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}, 4a + 6b = k\} > 0$ für $k \geq 0$, k gerade und $k \neq 2$

Satz 6.15 $\dim M_k = \left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor + \delta(k \not\equiv 2 \pmod{12})$

Beispiel: 6.3 M_4, M_6, M_8, M_{10} sind eindimensional, Basiselemente sind E_k ($\Rightarrow E_8 = E_4^2, E_{10} = E_4 E_6$)

k	12	14	16	18	20	22	24
Basis							
von M_k	E_4^3, E_6^2	$E_4^2 E_6$	$E_4^4, E_4 E_6^2$	$E_4^3 E_6, E_6^3$	$E_4^5, E_6^2 E_4^2$	$E_4^4 E_6, E_4 E_6^3$	$E_4^6, E_4^3 E_6^2, E_6^4$

$M_k = \mathbb{C}E_k + S_k, S_k = \Delta \cdot M_{k-12}$, Spitzenformen sind stets Polynome in E_4, E_6, Δ

Bemerkung: Diese Basiselemente haben ganzzahlige Fourierkoeffizienten.

Beweis: (des Lemmas) Induktion über k : für $k \leq 10$ stimmt die Behauptung (Nachrechnen)

Induktionsannahme: die Behauptung stimme für l gerade und $l < k$:

$$\begin{aligned} a(k) &= \# \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}, 4a + 6b = k\} \\ \text{Es gilt } a(k) &= a(k - 12) + 1 \end{aligned}$$

denn die Abbildung $\{(a, b) \mid 4a + 6b = k - 12\} \longrightarrow \{(a, b) \mid 4a + 6b = k\}$, mit $(a, b) \mapsto (a, b + 2)$ ist injektiv, es fehlt im Bild (a, b) mit $4a + 6b = k$ und $b = 0$ oder $b = 1$, also $2a + 3b = \frac{k}{2}$. Es gibt genau eine Lösung die fehlt, wähle b mit $\frac{k}{2} - 2a \equiv 3b \pmod{2}$, dann ist $a = \frac{1}{2}(\frac{k}{2} - 3a)$.

Also $a(k) = a(k - 12) + 1$

$$\begin{aligned} &\stackrel{\text{I.A.}}{=} \left\lfloor \frac{k - 12}{12} \right\rfloor + \delta(k - 12 \not\equiv 2 \pmod{12}) + 1 \\ &= \left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor + \delta(k \not\equiv 2 \pmod{12}) \end{aligned}$$

6.5 Ergänzungen

Lemma 6.4 Sei f holomorph auf \mathfrak{h} , periodisch mit Periode 1, $f = 1 + O(q)$, dann existieren Zahlen $a(n)$, so dass $f = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{a(n)}$ ist (logarithmische Ableitung anwenden).

Satz 6.16 (ohne Beweis)

$$\Delta \left(= \frac{E_4^3 - E_6^2}{1728} \right) = q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24}$$

Bemerkung:

$$Es gilt \Delta(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n$$

Dabei ist $\tau(n)$ die **Ramanujan τ -Funktion**. Die Lehmer Vermutung besagt $\tau(n) \neq 0 \forall n$.

Definition 6.7

$$\eta(z) := q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)$$

heißt **Dedekindsche η Funktion** ($\eta^{24} = \Delta$)

Satz 6.17 (Folgerung aus dem vorigen Satz)

$$\eta(Az) = (cz + d)^{1/2} \epsilon(A) \eta(z), \quad \epsilon(A) = \mu_{24} (\text{ 24. Einheitswurzeln})$$

(dabei wird als Wert der Wurzel, der Wert rechts der imaginären Achse genommen)

Bemerkung:

- η ist eine Modulform vom Gewicht $\frac{1}{2}$
- $\frac{1}{\eta} = q^{-1/24} \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)} = q^{-1/24} \sum_{l=0}^{\infty} p(l) q(l)$. Dabei ist $p(l)$ die Anzahl der Möglichkeiten l als Summe $l = l_1 + \dots + l_r$ mit $l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_r$ zu schreiben (Partitionszahl).

Satz 6.18

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{\Delta'}{\Delta} = E_2$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \frac{\Delta'}{\Delta} &= 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^n}{1 - q^n} = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{l \geq 1} q^{nl} \\ &= 1 - 24 \sum_{k=1}^{\infty} q^k \sum_{n|k} n = E_2 \end{aligned}$$

Folgerung: Sei $A \in SL(2, \mathbb{Z})$:

$$\begin{aligned}
 E_2(Az) &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\Delta'(Az)}{\Delta(Az)} \frac{1}{2\pi i} \frac{\frac{d}{dz}\Delta(Az)}{\Delta(Az)} (cz + d)^2 \\
 &= \frac{1}{2\pi i} (cz + d)^2 \frac{d}{dz} \left(\frac{\Delta(z)(cz + d)^{12}}{\Delta(z)(cz + d)^{12}} \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi i} (cz + d)^{-10} \frac{\Delta'(z)(cz + d)^{12} + A(z)(12c(cz + d))}{\Delta(z)} \\
 &= E_2(z)(cz + d)^2 + \frac{6c}{\pi i}(cz + d) \\
 d.h. \quad E_2|_2 A &= E_2 + \frac{6c}{\pi i} \frac{1}{(cz + d)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\Im z}|_2 A &= \frac{1}{\Im(Az)} \frac{1}{(cz + d)^2} = \frac{|cz + d|^2}{\Im(Az)} \frac{1}{(cz + d)^2} \\
 &= \frac{c\bar{z} + d}{cz + d} = \frac{1}{\Im z} - \frac{2ic}{cz + d} \\
 \left(\frac{2i}{z - \bar{z}} - \frac{2ic}{cz + d} = 2i(cz + d) - c(z - \bar{z}) \right)
 \end{aligned}$$

Satz 6.19 Sei $E_2^*(z) = E_2(z) + \frac{3}{\pi \Im(z)}$, dann gilt

$$E_2^*|_2 A = E_2^* \quad \text{für } A \in SL(2, \mathbb{Z})$$

6.6 Der Körper der Modulfunktionen

Zur Erinnerung:

$$\begin{aligned}
 K(\Gamma) &= \left\{ f : \mathfrak{h} \text{ meromorph} \mid \begin{array}{l} i) \quad f(Az) = f(z) \forall A \in SL(2, \mathbb{Z}) \\ ii) \quad f \text{ besitzt eine Fourierentwicklung der Gestalt} \\ f(z) = \sum_{n \geq -N} a_f(n) e^{2\pi i n \mathbb{Z}} \end{array} \right\} \\
 j &= \frac{E_4^3 1728}{E_4^3 - E_6^2} = q^{-1} + 744 + O(q), \quad j\text{-Invariante}, j \in K(\Gamma)
 \end{aligned}$$

Satz 6.20 1. j hat genau eine Nullstelle bei $z = e^{2\pi i/3} (= \rho)$ und genau eine Polstelle bei $i\infty$. Es gilt $j(i) = 1728$

2. j faktorisiert zu einer Bijektion:

$$\bar{j} : SL(2, \mathbb{Z}) \setminus \mathfrak{h} \cup \{i\infty\} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$$

6 Modulformen

Beweis: (1.) ist klar, zu (2.): Sei $\gamma \in \mathbb{C}$, dann ist zu zeigen: $(j - \gamma) = 0$ hat genau eine Lösung in dem Fundamentalbereich F : Anwendung der Valenzformel auf $(j - \gamma)$:

$$\sum_{\substack{z_0 \in F \\ z_0 \neq \rho, i}} \text{ord}_{z_0}(j - \gamma) + \frac{1}{2} \text{ord}_i(j - \gamma) + \frac{1}{3} \text{ord}_\rho(j - \gamma) = 1$$

Die einzigen Möglichkeiten sind

$\sum \text{ord}_{z_0}$	ord_i	ord_ρ
1	0	0
0	2	0
0	0	3

, also jeweils genau eine Nullstelle in F . ■

Satz 6.21

$$K(\Gamma) = \mathbb{C}(j),$$

d.h. jede Modulfunktion auf $SL(2, \mathbb{Z})$ ist eine rationale Funktion in j .

Beweis: Sei $f \in K(\Gamma)$, $f \neq \text{const}$, seien a_1, \dots, a_r die paarweise verschiedenen Nullstellen und Polstellen von f , ohne Vielfachheiten aufgezählt, die von i und ρ verschieden sind.

$$\text{Setze } g := \prod_{p=1}^r (j - j(a_p))^{\text{ord}_{a_p} f} \cdot (j - j(i))^{\text{ord}_i f/2} \cdot (j - j(\rho))^{\text{ord}_\rho f/3}$$

(Beachte die Exponenten sind aus \mathbb{Z} , nach Valenzformel)

Nach Valenzformel gilt: $\text{ord}_{i\infty} g = \text{ord}_{i\infty} f$, (denn f, g haben die gleichen Null- und Polstellen mit den gleichen Vielfachheiten).

Also ist $\frac{f}{g}$ holomorph in D als auch in $i\infty$, d.h. $\frac{f}{g} \in M_0$, also $= \text{const}$ nach früherem Satz. ■

Bemerkung: Betrachtet man den Körper der Modulfunktionen auf $\Gamma_0(l)$, $l \in \mathbb{Z}_{>0}$ und er heiße etwa $K(\Gamma_0(l))$, dann gilt:

$$\exists J : K(\Gamma_0(l)) = \mathbb{C}(J) \iff \text{lteilt »Ordnung der Monstergruppe«}$$

Satz 6.22 Sei $A, B \in \mathbb{C}$, so dass $4x^3 + Ax + B$ keine mehrfachen Nullstellen hat. Dann existiert ein $\tau \in F$ und ein $\alpha \in \mathbb{C}^*$, so dass

$$4x^3 + Ax + B = 4x^3 - \left(\pi^4 \frac{4}{3} E_4(\tau) \alpha^{-4} \right) x - \left(\pi^6 \frac{8}{27} E_6(\tau) \alpha^{-6} \right) \quad (*)$$

Bemerkung:

1. $\wp(z) := \wp(\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}, z)$, dann

$$\begin{aligned} \mathbb{C}/\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z} &\xrightarrow{\text{bijektiv}} \left\{ (x, y) \mid y^2 = 4x^3 - \left(\pi^4 \frac{4}{3} E_4(\tau) \right) x - \left(\pi^6 \frac{8}{27} E_6(\tau) \right) \right\} \cup [0 : 1 : 0] \\ z &\mapsto (\wp(z), \wp'(z)) \end{aligned}$$

2. Folgerung aus Satz und Erinnerung: Zu A, B wie im Satz existiert ein L (nämlich $L = \alpha(\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z})$), so dass

$$\begin{aligned} \mathbb{C}/L &\longrightarrow \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = (*)\} \cup [0 : 1 : 0] \\ z &\mapsto (\wp(z, L), \wp'(z, L)) \end{aligned}$$

eine Bijektion ist.

Beispiel: 6.4

$$\begin{aligned} y^2 = 4x^3 + x &\longleftrightarrow L = \alpha(\mathbb{Z}i + \mathbb{Z}) = \alpha\mathbb{Z}[i] \\ y^2 = 4x^3 + 1 &\longleftrightarrow L = \alpha(\mathbb{Z}\rho + \mathbb{Z}) = \tilde{\alpha}\mathbb{Z}[\rho] \end{aligned}$$

Folgerung: $\overline{\mathbb{C}}/L \xrightarrow{\text{Riem. Fläche}} \overline{\mathbb{C}}/L' \iff j(L) = j(L')$ (Dabei ist $j(L) := j(\frac{\omega_1}{\omega_2})$ für $L = \omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}$, mit $\Im(\frac{\omega_1}{\omega_2}) < 0$.)

Lemma 6.5 Seien $a, b \in \mathbb{C}$, so dass $a^3 + 27b^2 \neq 0$,

$$\exists \gamma : A = \gamma^4 a, B = \gamma^6 b \quad \text{äquivalent zu} \quad \frac{A^3}{A^3 + 27B^2} = \frac{a^3}{a^3 + 27b^2}$$

(Beachte Diskriminante $(x^3 + \frac{A}{4}x + \frac{B}{4}) = -\frac{1}{16}(A^3 + 27B^2) \neq 0$ nach Voraussetzung)

Beweis:

\Rightarrow : Einsetzen und Nachrechnen

\Leftarrow : Identität ist äquivalent zu $B^2a^3 = A^3b^2$, d.h. $(\frac{A}{a})^3 = (\frac{B}{b})^2$, falls $a, b \neq 0$ (sonst leichte Übung). Setze $\gamma := (\frac{A}{a})^{1/4}$ (eine Wurzel wählen), dann $(\frac{B}{b})^2 = \gamma^{12}$, d.h. $\frac{B}{b} = \pm\gamma^6$ falls positiv: ok, sonst ersetze γ durch $i\gamma$.

■

Beweis: [des Satzes] Gesucht sind τ, α mit

$$\begin{aligned} A &= -\pi^4 \frac{4}{3} E_4(\tau) \alpha^{-4} & B &= -\pi^6 \frac{8}{27} E_6(\tau) \alpha^{-6} \\ &= -\gamma^4 E_4(\tau) & &= \gamma^6 \frac{E_6(\tau)}{\sqrt{27}} \\ \text{und } \gamma &= \pi i \alpha^{-1} \left(\frac{4}{3} \right)^{1/4} \end{aligned}$$

6 Modulformen

Jetzt wird das Lemma angewendet: Für $\tau \in \mathfrak{h}$ ist

$$(-E_4(\tau))^3 + 27 \left(\frac{E_6(\tau)}{\sqrt{27}} \right)^2 = - (E_4(\tau)^3 - E_6(\tau)^2) = 1728\Delta(\tau) \neq 0$$

Also suchen wir τ mit

$$\frac{A^3}{A^3 + 27B^2} = \frac{E_4(\tau)^3}{-1728\Delta(\tau)} = \frac{j(\tau)}{(1728)^2}$$

solch $\tau \in F$ existiert nach dem Satz 6.20. ■

6.7 Thetareihen

Sei $L \subseteq \mathbb{R}^n$ (vollständiges) Gitter in \mathbb{R}^n (d.h. $L = \mathbb{Z}a_1 + \dots + \mathbb{Z}a_n$, a_1, \dots, a_n \mathbb{R} -Basis des \mathbb{R}^n)

„sei das gewöhnliche Skalarprodukt: $x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$

Definition 6.8 Das zu L duale Gitter L^* sei

$$L^* := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \forall x \in L : x \cdot y \in \mathbb{Z}\}$$

Lemma 6.6 L^* ist vollständiges Gitter

Beweis: Sei a_1^*, \dots, a_n^* die zu a_1, \dots, a_n duale Basis, dann ist $a_i \cdot a_j = \delta_{i,j}$ (Existenz:
 $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$, dann ist $(A^{-1})^t = \begin{bmatrix} a_1^* \\ \vdots \\ a_n^* \end{bmatrix}$ und dann $L^* = \mathbb{Z}a_1^* + \dots + \mathbb{Z}a_n^*$) ■

Definition 6.9

$$\Theta_L(z) := \sum_{x \in L} e^{\pi i zx^2} \quad (\text{d.h. } \Theta_L = \sum_{x \in L} q^{x^2/2})$$

heißt **Thetareihe** zu L .

Lemma 6.7 Die Reihe konvergiert absolut gleichmäßig auf jeder Teilmenge von \mathfrak{h} , der Gestalt $\Im z \geq R > 0$. Insbesondere ist Θ_L holomorph in \mathfrak{h} .

Beweis: $x = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n \in \mathbb{R}^n$, dann

$$\begin{aligned} x \cdot x &= \sum_{i,j} x_i a_i a_j x_j \\ &\xi \underbrace{\underbrace{(a_i \cdot a_j)_{1 \leq i,j \leq n}}_{=G} \xi^t} \end{aligned}$$

Mit einer Gram-Matrix G zur Basis a_1, \dots, a_n und $\xi = (x_1, \dots, x_n)$ Sei $\lambda := \min_{\xi^2=1} \xi G \xi^t$, es gilt $\lambda > 0$.

Es gilt $\xi G \xi^t = \frac{\xi}{|\xi|} G \left(\frac{\xi}{|\xi|} \right)^t |\xi|^2 \geq \lambda \xi^2, \xi \neq 0, \xi \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} \sum_{x \in L} |e^{\pi i z x^2}| &= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} |e^{\pi i z \xi G \xi^t}| = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{-\pi R \lambda \xi^2} \\ &= \left(\sum_{p \in \mathbb{Z}} e^{-\pi R \lambda p^2} \right)^n = \left(2 \sum_{p=0}^{\infty} e^{-\pi R \lambda p} \right)^n < \infty, \end{aligned}$$

da $e^{-\pi R \lambda} < 1$. ■

Definition 6.10

$$v(L) := \left| \det \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \right|$$

heißt das **Volumen von L** .

Lemma 6.8 $v(L)$ hängt nicht von der speziellen Wahl der a_1, \dots, a_n ab.

Beweis: Ist $L = \mathbb{Z}b_1 + \dots + \mathbb{Z}b_n$, dann ist

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

wobei $T \in GL(n, \mathbb{Z})$ ist. Wegen $\det T = \pm 1$ folgt die Behauptung. ■

Bemerkung:

$$v(L) = \int_{\{x_1 a_1 + \dots + x_n a_n \mid 0 \leq x_1, \dots, x_n \leq 1\}} dx$$

Poissonsche Summenformel

Sei f eine Funktion mit »guten« Eigenschaften auf \mathbb{R}^n , dann gilt

$$\sum_{x \in L} f(x) = \frac{1}{v(L)} \sum_{y \in L^*} \hat{f}(y),$$

dabei ist $\hat{f} = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot y} dx$ (die Fourier Transformierte).

Bemerkung: $\frac{1}{v(L)} = \frac{1}{v(L)^{1/2}} v(L^*)^{1/2}$, damit wird die Formel symmetrischer. Dies wird angewendet auf $g(x) = e^{-\pi t x^2}$ ($x \in \mathbb{R}^n, x \cdot x = x^2, t \in \mathbb{R}_{>0}$)

Lemma 6.9 $\hat{g}(y) = \frac{1}{t^{n/2}} e^{-\pi \frac{1}{t} y^2}$

6 Modulformen

Beweis:

$$\begin{aligned}\hat{g}(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi t x^2} e^{-2\pi i x \cdot y} dx \\ (\text{quadrat. Ergänzung}) &= \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi t(x+iy/t)^2} dx}_{(\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t(u+iv/t)^2} du)^n} e^{-\pi \frac{1}{t} y^2} \\ \text{Es ist } \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t(u+iv/t)^2} du &= \int_{\Im z = \frac{v}{t}} e^{-\pi t z^2} dz \xrightarrow{\text{Int.-weg verschieben}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t z^2} dz = t^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi z^2} dz \\ &= \frac{\sqrt{\pi}^{-1} \Gamma(\frac{1}{2})}{t^{1/2}}\end{aligned}$$

■

Satz 6.23

$$\Theta_L(z) = \frac{1}{(\sqrt{\frac{z}{i}})^n} v(L) \Theta_{L^*}(-\frac{1}{z})$$

(Dabei wird die Wurzel stets so gewählt, dass $\Re z > 0$ bzw. z auf der imaginären Achse liegt.)

Beweis: Beide Seiten sind holomorph in $z \in \mathfrak{h}$, also genügt es die Behauptung für $z = it$, $t > 0$ zu beweisen (Identitätssatz). Für $z = it$:

$$\begin{aligned}\Theta_L(z) &= \sum_{x \in L} e^{-\pi t x^2} = \sum_{x \in L} g(x) \\ \text{rechte Seite:} &= \sum_{y \in L^*} \underbrace{\frac{1}{t^{n/2}} e^{-\pi/t y^2}}_{=\hat{g}(y)}\end{aligned}$$

■

Sei L ganz (d.h. $\forall x, y \in L : x \cdot y \in \mathbb{Z}$) gerade (d.h. $\forall x \in L : x^2 \in 2\mathbb{Z}$) und unimodular (d.h. $\left| \det \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{bmatrix} \right| = 1 \Rightarrow L^* = L$)

Satz 6.24 $n \equiv 0 \pmod{8}$ (ohne Beweis)

Satz 6.25 $\Theta_L \in M_{\frac{n}{2}}(SL(2, \mathbb{Z}))$

Beweis: Nach vorhergehendem Satz gilt:

$$\begin{aligned}\Theta_L(z) &= z^{-n/2} \Theta_L\left(-\frac{1}{z}\right), \text{ d.h. } \Theta_L|_{n/2} S = \Theta_L \\ \text{Ferner: } \Theta_L &= \sum_{x \in L} q^{x^2/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \# \{x \in L \mid x^2 = 2n\} q^n,\end{aligned}$$

daher $\Theta_L|_{n/2} T = \Theta_L$ und holomorph bei $i\infty$

Definition 6.11 L, L' heißen isomorph, falls $L = \sigma(L')$ für eine Isometrie σ des \mathbb{R}^n ($\sigma \in O(n, \mathbb{R})$)

Satz 6.26 Die Anzahl der Isomorphieklassen der ganzen geraden unimodularen Gitter in \mathbb{R}^n ist endlich. Es gilt

$$\sum_{\substack{L \text{ ganz, gerade unimod. in } \mathbb{R}^n \\ \text{modulo Isomorphie}}} \frac{1}{|Aut(L)|} = 2^{1-n} \frac{|B_{n/2}|}{(n/2)!} \prod_{j=1}^{n/2-1} |B_{2j}|$$

Bemerkung: Diese Anzahl wächst sehr schnell:

n	1	16	24	32
	1	2	24	ca. 80 Mio.

Das (bis auf Isomorphie einzige) ganze gerade unimodulare Gitter In Dimension 8 heißt E_8 .

Folgerung: $\Theta_{E_8} \in M_4$ daher $\Theta_{E_8} = E_4$.

$$\# \{x \in E_8 \mid x^2 = 2n\} = 240 \sum_{d|n} d^3 \quad (n > 0)$$

Konstruktion von E_8 :

Die Projektive Ebene über \mathbb{F}_2 : $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2) = (\mathbb{F}_2^3 \setminus \{(0,0,0)\}) / \mathbb{F}_2^*$ hat 7 Punkte und 7 Geraden, jede Gerade hat 3 Punkte und jeder Punkt liegt auf genau 3 Geraden (siehe Abbildung 6.3).

Die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2))$ ist eine Gruppe bzgl. symmetrische Differenz $A + B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Definiere $H_7 :=$ Menge aller Geraden \cup Menge aller Komplemente von Geraden $\cup \{\emptyset, \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)\}$.
 $\#H_7 = 2^4$

Als Übung: H_7 ist Untergruppe von $\mathcal{P}(\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2))$.

Identifizierte Teilmenge von $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$ mit Vektoren in \mathbb{F}_2^7 , dazu werden die Punkte P_1, \dots, P_7 nummeriert und eine Zuordnung, vermöge

$$A \longmapsto \begin{cases} \text{Vektor hat 1 an Stelle, } i & \text{falls } P_i \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

getroffen. Damit wird H_7 zu einem Untervektorraum von \mathbb{F}_2 .

Setze $H_8 := \{(x, x_1 + \dots + x_7) \in \mathbb{F}_2^8 \mid x = (x_1, \dots, x_7) \in H_7\} \subseteq \mathbb{F}_2^8$ (**Hamming Code** der Länge 8)

6 Modulformen

Übung: H_8 ist selbstdual (d.h. $H^\perp = H$) und doppelt gerade (d.h. jedes $x \in H_8$ hat genau 0, 4 oder 8 Einsen).

Definition 6.12 $E_8 := \frac{1}{\sqrt{2}} \{x \in \mathbb{Z}^8 \mid x \bmod 2 \in H_8\}$

Übung: E_8 ist ein Gitter und hat folgende weitere Eigenschaften:

- gerade ($x^2 = \frac{1}{2} \sum x_i^2, \sum x_i^2 \equiv 0 \pmod{4}$, da H_8 doppelt gerade ist)
- ganz ($x \cdot y = \frac{1}{2}(x+y)^2 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}$)
- unimodular (weil H^\perp selbstdual ist)

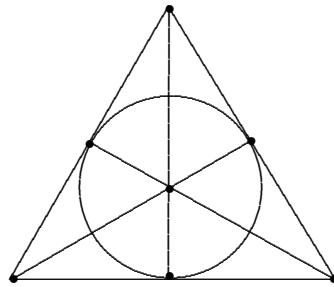


Abbildung 6.3: Die Projektive Ebene mit 7 Punkten, der Kreis ist die siebte Gerade.



Ende!

Symboerverzeichnis

Γ , 15	Θ_{E_8} , 81
σ -Funktion, 11	$\deg(f)$, 51
$Aut(\mathbb{C})$, 27	$\sigma_1(n)$, 65
$Aut(\overline{\mathbb{C}})$, 29	$\sigma_r(n)$, 68
$Aut(\overline{\mathbb{C}})_\infty$, 31	(ω) , 46
$Aut(\mathfrak{h})$, 32	$\tilde{P}(\mathbb{C}/\Gamma)$, 47
Az , 32	$\wp(\tau, z)$, 63
$\overline{\mathbb{C}}$, 23	$\zeta(s)$, 68
D_∞ , 4	e_{z_0} , 51
D_f , 3	j , 76
$Div(\overline{\mathbb{C}})$, 26	$v(L)$, 89
$Div_0(\overline{\mathbb{C}})$, 26	$K(\Gamma)$, 75
E , 54	$M_k(\Gamma)$, 75
E_Γ , 54	$S_k(\Gamma)$, 75
$GL(2, \mathbb{C})$, 30	Γ_0 , 73
$Mer(U)$, 25	$GL(2, \mathbb{R})$, 32
S^1 , 34	$Hol(\mathbb{C})$, 2
$[z, a, b, c]$, 31	$\Im z$, 12
$\Theta(\Gamma)$, 45	
$\Theta(\Gamma)_{triv}$, 45	
\mathcal{D} , 3	$Mer(\mathbb{C})$, 2
\mathbb{D} , 32	
B_n , 66	\mathcal{P} , 2
$Div(\mathbb{C}/\Gamma)$, 42	$\mathcal{P}_{\neq 0}$, 2
E_4 , 76	
E_6 , 76	$\Gamma \setminus X$, 34
E_{2k} , 68	
$Ell(\Gamma)$, 41	
L^* , 88	
M_* , 79	
$P(\mathbb{C}/\Gamma)$, 42	
$Pic_0(\mathbb{C}/\Gamma)$, 50	
$[x_0 : x_1 : \dots : x_n]$, 53	
Δ , 59, 76	
$\Gamma \sim \Delta$, 62	
$\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, 53	
Θ_L , 88	

Index

- ähnlich*, 62
Bernoulli Zahlen, 66
biholomorph, 29, 61
biholomorph äquivalent, 32, 61
diskrete Untergruppe, 11
Diskriminante
 eines Polynoms, 59
Divisor, 3
 auf \mathbb{C}/Γ , 42
 elliptische Funktion, 41
 meromorphe Funktion, 25
Divisortheorie, 3
Doppelverhältnis, 31
Duplication Formula, 20
elliptische Funktionen, 41
Euler-Mascheronische Konstante, 15
exakte Sequenz, 3
Fundamentalbereich von \mathfrak{h} modulo Γ , 35
Funktion
 Γ , 15
 σ , 11
 Dedekindsche η Funktion, 84
 Ramanujan τ -Funktion, 84
Funktionalgleichung
 Γ -*Funktion*, 17
ganz, 2
ganz rational, 2
Gerade
 projektive G., 56
Gitter
 duales G., 88
 vollständiges, 12
 vollständiges G. im \mathbb{R}^n , 88
 Volumen eines G., 89
gleichmäßig konvergent, 1
Grad von f , 51
Hamming Code, 91
Hauptdivisoren, 42
holomorph
 auf $\overline{\mathbb{C}}$, 24, 29
 Funktion auf Riemannschen Flächen, 61
 holomorph bei $i\infty$, 75
Homöomorphismen, 24
homogene Koordinaten, 53
homogenes Polynom, 56
isomorph
 i. bei Riemannschen Flächen, 61
Körper der elliptischen Funktionen, 41
Karten, 24
kompakt gleichmäßige Konvergenz, 1
Konvergenz
 absolute von unendlichen Produkten, 6
 gleichmäßig, 1
 kompakt gleichmäßige, 1
 normale, 2
 unendliche Produkte, 5
Kozykel, 45
Kozykelrelation, 45
Möbius-Transformation, 31
meromorph
 auf $\overline{\mathbb{C}}$, 25
Moduldreieck, 35, 71
Modulform
 meromorphe, 74
 schwache M., 73
Modulfunktionen, 75
Modulgruppe, 71

normal konvergent, 2
Orbit, 34
Picard Gruppe, 50
Poissonsche Summenformel, 89
primitive Zweiteilungspunkte, 47
Produktdarstellung
 Sinus, 11
projektive Ebene über \mathbb{R} , 53
Punkte
 unendlich ferne P., 53
rational, 2
Raum
 projektiver R. über \mathbb{C} , 53
Riemannsche ζ -Funktion, 68
Riemannsche Fläche
 allgemeine Definition, 60

Satz
kleine S. von Picard, 29
Lemma von Schwarz, 34
Liouville I, 42
Liouville II, 42
Liouville III, 44
Liouville IV, 48
Mittag-Leffler, 37
Valenzformel, 76
Weierstraß, 28
Sequenz
 exakte, 3
Singularität
 wesentliche bei ∞ , 23
Spitzenformen, 75
Stabilisator, 31
Standgruppe, 31
Stirlingsche Formel, 21

Thetafunktionen mod Γ , 45
Thetareihe, 88
Triplication Formula, 21

Verzweigungsgrad, 51
Vielfachheit, 51